FL

Manuel Ahijado
Pilar Grau
Domingo Barrio

Ejercicios para introducción a la microeconomía de ADE

MICROECONOMÍA

EDICIONES ACADÉMICAS, S.A.

Manuel Ahijado
Pilar Grau
Domingo Barrio

EJERCICIOS PARA INTRODUCCIÓN A LA MICROECONOMÍA DE ADE

EDICIONES ACADÉMICAS, S.A.

ISBN: 84-96062-68-6 (Tomo II)
ISBN: 84-96062-66-X (Obra completa)
Depósito legal: M. 36.552-2006

Compuesto e impreso en Fernández Ciudad, S. L.
Coto de Doñana, 10. 28320 Pinto (Madrid)

Impreso en España/Printed in Spain

Índice

Este libro es un bien público. Nadie tiene
derecho a subrayarlo ni a anotarlo.
El infractor deberá reponer el documento o
reintegrar el importe del mismo.

curso, y (3) otras son más difíciles y pretenden cubrir la preparación de los aspirantes a las calificaciones más altas.

Es preciso dejar claras algunas advertencias, en forma de **consejos**: 1.ª para no hacer excesivamente largos los enunciados de las preguntas, se entenderán ***bajo los supuestos usuales*, salvo que se especifique otra cosa de manera explícita**; 2.ª se recomienda al lector que trate de buscar la respuesta correcta, pero qué también se asegure que las demás son incorrectas. Ello provee de un doble *test*, que proporciona un sentimiento de seguridad ante la respuesta.

Se ofrece en todas ellas una propuesta breve de solución (o *Ayuda*), más explicadas aquellas que se estime lo necesiten en algún sentido.

Es nuestra convicción, la de los profesores que formamos parte de la cátedra, que en un examen de 20 preguntas debería tener aproximadamente la siguiente composición: 4 fáciles, 8 «normales», 4 regulares y 4 difíciles. En la valoración de grupos de 20 preguntas, al igual que en el criterio de corrección de la cátedra, el baremo aconsejado es: (a) 0,5 la respuesta correcta; (b) −0,15 de «penalización» de la respuesta errada, y (c) neutra la no contestada. Todo ello para aproximarse a las circunstancias reales de evaluación.

El CD Rom

Se puede considerar una Versión 3.0, respecto a dos prototipos que le precedieron y se amplía ahora de modo que incluye en torno a 1.200 tests (ejercicios y cuestiones) que intentan que el alumno aprecie las cuestiones analíticas discutidas en el volumen teórico desde distintos ángulos, así como reparar en los fallos lógicos de un argumento, cuando este está presente.

Permite realizar un *entrenamiento* por capítulos, pero al modo de los exámenes reales, y *exámenes generales*, es decir, de todos los capítulos para simular un examen real, autoevaluación con el mismo criterio que en aquellos, etc., lo que permite observar la progresión en el trabajo y en la comprensión de la materia.

Las preguntas se presentan por capítulos en estricta correspondencia con los el libro teórico aunque el **CD Rom** permite «mezclarlas», al modo de los exámenes.

Todo ello se hace con la idea de ayudar a los alumnos y alumnas en su preparación en lo que esperamos haber acertado.

MANUEL AHIJADO
Catedrático de Microeconomía
UNED
Mayo 2002

CAPÍTULO 1

Introducción a los mercados [1,2]

Precios y cantidades de equilibrio

EJERCICIO 1.1.

Si un mercado viene representado por las siguientes funciones de oferta y demanda: $x^s = 10 + 4p$; $x^d = 70 - 2p$, obtenga el precio y la cantidad de equilibrio.

En el mismo ha de darse para el equilibrio que la oferta sea igual a la demanda $x^s(p) = x^d(p) = x(p)$ para un precio determinado, por lo que sustituyendo:

$$10 + 4p = 70 - 2p \qquad 6p = 60 \qquad p = 10$$

Sustituyendo ahora en x^d, por ejemplo:

$$x^d = 70 - 2p = 70 - 2 \cdot 10 = 50$$

Se puede comprobar también que la cantidad ofrecida coincide con la demandada para el precio de equilibrio:

$$x^s = 10 + 4p = 10 + 4 \cdot 10 = 50$$

[1] Este capítulo, como su correspondiente del libro teórico, se establece como una suerte de *vacuna* introductoria para evitar entrar de golpe en la teoría de la demanda y la oferta a nivel intermedio, a la vez que establece algunos conceptos previos relativos a esos temas.

[2] Se han incorporado al final del capítulo algunos ejercicios relativos a la frontera de posibilidades de producción o curva de transformación, correspondientes al Capítulo 1 de cualquier libro teórico sobre la materia, sin pérdida de generalidad.

EJERCICIO 1.2.

Sea un mercado cuyas funciones de demanda y oferta de libros de Arte Manierista son respectivamente: $x^d = 90 - p$, $x^s = -10 + 3p$. Hallar el precio y la cantidad de equilibrio (las cantidades se miden en unidades físicas por mes y los precios en euros por unidad de libro).

La función de demanda sólo contiene una variable independiente, el precio, por lo que el resto de los factores que la afectan se considerarán incluidos en la cláusula *caeteris paribus* (todo lo demás constante) La primera ecuación indica cuando el precio es cero los demandantes conjuntamente estarán dispuestos a demandar 90 libros y que cuando el precio es 90 unidades de cuenta (por ejemplo, euros) que la cantidad demandada sería nula. El signo menos denota la relación inversa entre los movimientos de los precios y de las cantidades. La función de oferta señala que a un precio cero los oferentes ofrecerían −10 unidades (quizás una señal para generar órdenes al departamento de producción de no producir y/o acumular en los almacenes 10 unidades) y que cuando el precio es 15, por ejemplo, la cantidad ofrecida sería 35. Como las suponemos a ambas lineales basta obtener dos puntos de las mismas.
La condición de equilibrio del mercado es:

$$x^d(p) = x^s(p) = x(p)$$

que en este caso concreto tiene la siguiente especificación:

$$90 - p = -10 + 3p$$

Operando: $100 = 4p$ de donde $p = 25$ y calculando la oferta y demanda, agregada de mercado en este caso:

$$x^d(25) = 90 - p = 90 - 25 = 65 \qquad x^s(25) = -10 + 3 \cdot 25 = 65$$

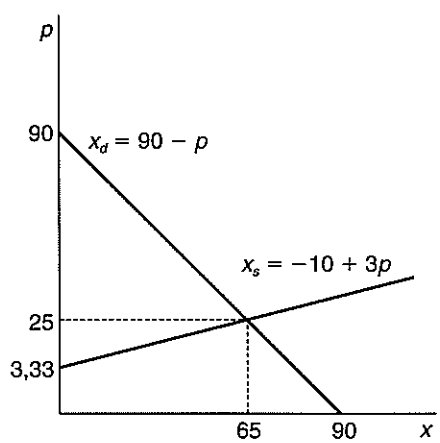

Figura 1.1

Se comprueba que coinciden; es decir, que a ese precio la cantidad que desean demandar los demandantes y ofrecer los oferentes (sobre sus respectivas ecuaciones o curvas) ambos conjuntamente, son iguales.
Nótese las pendientes negativas y positivas respectivamente de las curvas de demanda y oferta de mercado, reflejando la conducta discutida antes.

Variaciones en los precios y ajustes de mercado

EJERCICIO 1.3.

Suponga que en el ejercicio del ejemplo anterior la demanda ha variado hasta ser $x^{d\prime} = 110 - p$. Obtenga el equilibrio del mercado y compárelo con el anterior.

Mientras el precio de mercado no cambie y no cambien los parámetros (los valores 90, 1, 10, 3, en valor absoluto o prescindiendo de los signos, en el ejercicio anterior) o algunas de las variables contenidas en la cláusula *ceteris paribus*, el modelo se replicaría por unidad de tiempo, semana a semana, etc., por ejemplo, y continuaría prediciendo que el precio de equilibrio es 25 euros (y la cantidad de equilibrio 65 libros). Pero en el nuevo enunciado el parámetro independiente de la función de demanda a pasado a ser 110, lo que hace desplazar paralelamente la curva hacia la derecha (la pendiente -1 no se ha alterado porque los precios no han variado), obteniendo un nuevo precio de equilibrio de 30 y una nueva cantidad de equilibrio de 80. Todo ello parece razonable y esperado: la mayor demanda con una oferta dada hace aumentar el precio, pero a ese precio los oferentes están dispuestos a ofrecer 15 unidades más que antes satisfaciendo la demanda adicional.

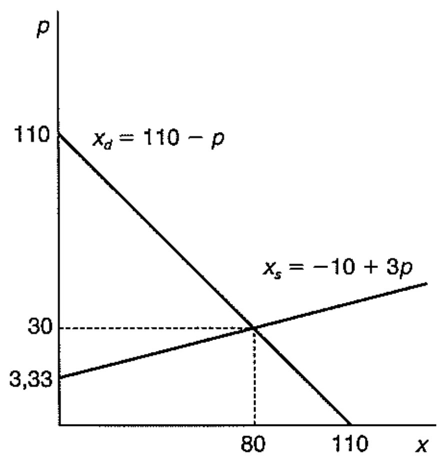

Figura 1.2

Podemos utilizar el modelo algebraico para comprobarlo desde otro ángulo. La condición de equilibrio $x^d(p) = x^s(p) = x(p)$ ahora es $110 - p = -10 + 3p$ de donde operando se obtiene $120 = 4p$ por lo que $p = 30$. Sustituyendo:

$$x^d(30) = 110 - p = 110 - 30 = 80 \qquad x^s(30) = -10 + 3 \cdot 30 = 80$$

con los mismos comentarios que antes.

Debe apreciarse que aunque tan sólo ha variado la demanda, el precio viene determinado por las dos fuerzas, la oferta y la demanda; y la elevación del precio ha llevado también a ofrecer más y a demandar más, ambas a lo largo de las curvas respectivas.

EJERCICIO 1.4.

Si con $x^d(p)$ del Ejercicio 1.2 el precio hubiera permanecido en 30 euros (digamos por una intervención gubernamental) ¿cuál sería la cantidad demandada y cuál la ofrecida? y ¿cuál sería la reacción que cabría esperar del mercado?

Sin más que sustituir este precio en las funciones de demanda y oferta respectivas:

$$x^d(30) = 90 - p = 90 - 30 = 60 \qquad x^s(30) = -10 + 3 \cdot 30 = 80$$

Naturalmente, como el precio es superior al de equilibrio (debemos suponer que es un precio mínimo para que la restricción sea operativa), se crea un exceso de oferta.

EJERCICIO 1.5.

Si un mercado viene representado por las siguientes funciones de oferta y demanda: $x = 7 + 3{,}8p$, $x = 60 - 1{,}5p$. Obtener precio y cantidad de equilibrio.

No se identifican las curvas de oferta y demanda en el enunciado, pero son ya autoevidentes (debido a las condiciones de signo de las pendientes mientras no se especifique lo contrario). La primera ecuación es la de oferta y la segunda la de demanda. Aplicando el procedimiento ya conocido, sustituyendo en la condición de equilibrio, $x = x^s = x^d$; $5{,}3p = 53$; $p = 10$. Sustituyendo en x^d (o en x^s):

$$x^d = 7 + 3{,}8 \cdot 10 = 7 + 38 = 45$$

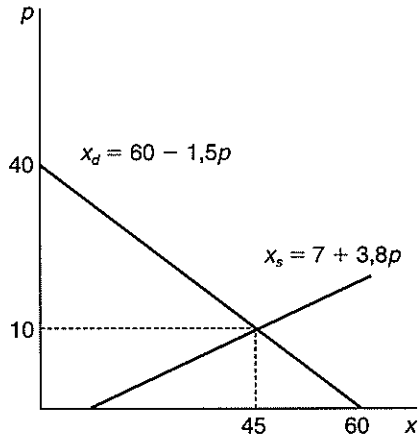

Figura 1.3

Excedentes del consumidor y del productor

EJERCICIO 1.6.

Sea una función de demanda como, $x = a - bp = 50 - 2p$. Calcule la variación del excedente del consumidor en las dos siguientes situaciones: a) si p pasa de 5 a 4, y; b) si p pasa de 5 a 10.

a) En el primer caso, si: $p = 5$, entonces $x = 50 - (2 \cdot 5) = 40$;
y por otro lado, si: $p = 4$, entonces $x = 50 - (2 \cdot 4) = 42$.

Gráficamente en la figura 1.4 sabemos que bajo ciertos supuestos la variación en el excedente es un triángulo cuya área se calcula como un triángulo más un rectángulo, o bien un trapecio: $\frac{(\text{base} \cdot \text{altura})}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$

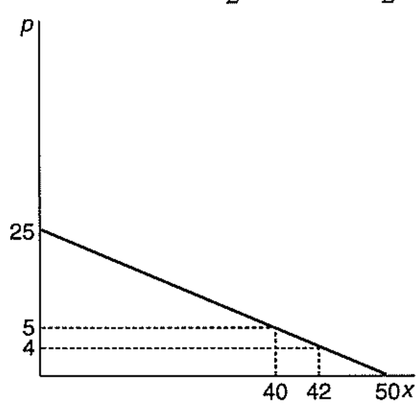

Figura 1.4

– el rectángulo (base por altura) = $40 \cdot 1 = 40$
– área total: 41

b) En el segundo caso, análogamente:

$$\text{si } p = 5 \text{ entonces } x = 50 - (2 \cdot 5) = 40$$
$$\text{si } p = 10 \text{ entonces } x = 50 - (2 \cdot 10) = 30$$

Gráficamente, figura 1.5 las áreas son:

– triángulo $\dfrac{\text{(base por altura)}}{2} = \dfrac{(10 \cdot 5)}{2} = 25$
– rectángulo (base por altura) = $(30 \cdot 5) = 150$
– área total: 175

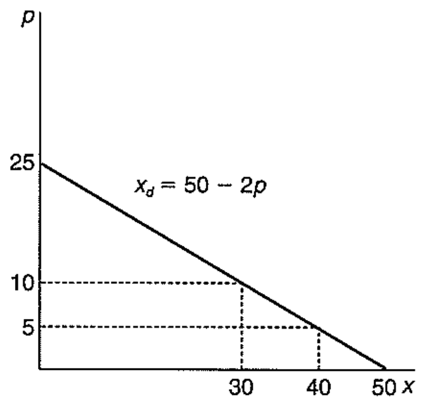

Figura 1.5

EJERCICIO 1.7.

Dada la función de demanda $x = 48 - 6p$, con $p = 4$ ¿el excedente del consumidor será?

Si $p = 8, x = 0$ Si $p = 4, x = 24$

Por tanto, el excedente del consumidor para la variación del precio será ahora un área:

$$\frac{((8 - 4)24)}{2} = 48$$

EJERCICIO 1.8.

Dada la función de oferta $x = 4p$, con $p = 3$ ¿el excedente del productor será?

Si $p = 0, x = 0$ Si $p = 3, x = 12$

El excedente del productor será $\dfrac{3 \cdot 12}{2} = 18$

Excesos de demanda y de oferta

EJERCICIO 1.9.

Suponga las siguientes curvas de demanda y oferta lineales: $p^d = 60 - \left(\dfrac{x}{2}\right)$, $p^s = -10 + 2x$. Si el gobierno establece que $p = 35$, ¿cuál es el exceso de demanda que se genera?

Cuando el precio es 35, la cantidad demandada es 50 y la cantidad ofrecida 22,5, el exceso de demanda es, por tanto la diferencia: 27,5.

EJERCICIO 1.10.

Si un mercado está representado por el siguiente cuadro:

p	x^d	x^s
4	100	10
8	90	30
12	80	50
16	70	70

Si p es 12 ¿el exceso de demanda es?

Por la misma razón apuntada en el ejercicio anterior el exceso de demanda al precio del enunciado es:

$$x^d - x^s = 80 - 50 = 30$$

en sus unidades respectivas.

Precios intervenidos

EJERCICIO 1.11.

Dadas las siguientes funciones de oferta y demanda de mercado $x^s = 10.000 + 110p$, $x^d = 20.000 - 90p$. ¿Cuántas unidades se venderían de x si se establece un precio máximo de 40 unidades de cuenta?

Primero igualando oferta a demanda obtenemos el precio de equilibrio:

$$200p = 10.000 \qquad p = 50 \qquad \text{precio de mercado}$$

Como el precio máximo es $p_{\text{máx}} = 40$ que es menor que el precio de equilibrio se vende la cantidad del lado de la oferta:

$$14.400 = 10.000 + 110 \cdot 40 = x^s$$

El lado de la demanda estaría dispuesto a comprar 16.400, es decir, (20.000 − 90 · 40), pero el lado corto restringe. Nótese que ignoramos calcular el precio de mercado porque en este caso (el del enunciado) no es operativo

EJERCICIO 1.12.

Dadas las siguientes funciones de oferta y demanda de mercado $x^s = 10.000 + 110p$, $x^d = 20.000 - 90p$ ¿Cuántas unidades se venderían de x si se establece un precio mínimo de 60 unidades de cuenta?

Por el mismo procedimiento por las mismas razones que en el ejercicio anterior, el lado corto impone su *ley* y, podemos a calcularlo directamente sobre la función de demanda, que ahora es el lado corto:

$$x^d = 20.000 - 90(60) = 14.600$$

Nótese que ignoramos calcular el precio de mercado porque en este caso, como en el anterior, no es operativo.

EJERCICIO 1.13.

Dado un mercado con funciones de oferta y demanda: $x^d = 140 - 3p$ y $x^s = -20 + + 5p$, si el precio mínimo fijado por la autoridad económica fuese de 15 unidades ¿cuál sería la cantidad intercambiada en el equilibrio?

Nótese que este es un caso distinto de los anteriores; técnicamente sería un error de la autoridad, porque la restricción sería la que no fuera operativa y el mercado funcionaría como si esta no existiera. Si el precio es 15 (inferior al de equilibrio) en el mercado se intercambiará la cantidad de equilibrio, luego:

$$x^d = 140 - 3p = -20 + 5p = x^s \qquad p = 20 \qquad x = 80$$

Teorema de la tela de araña

EJERCICIO 1.14.

Si en un mercado la función de oferta $x_t^s = 2p_{t-1}$ y la situación inicial es $p = 2$ y $x = 4$, y la función de demanda es $x_t^d = 10 - p_t$: (a) ¿Cuál sería el precio de equilibrio?; (b) ¿El modelo converge al equilibrio?; y, (c) Establecer gráficamente la secuencia de precios y cantidades para los dos siguientes períodos partiendo de un precio inicial $p_t = 4$.

Es un caso de modelo de telaraña o ajuste retrasado de los precios. Gráficamente los datos podrían representarse como:

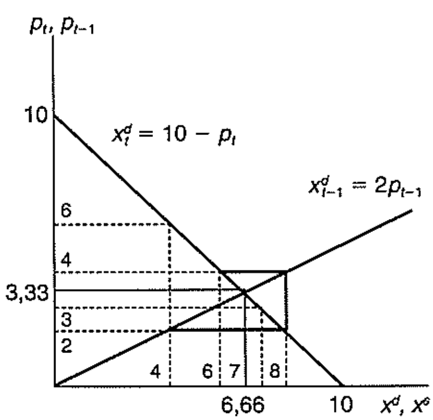

Figura 1.6

$p_e = 3{,}33; x_e = 6{,}66$

EJERCICIO 1.15.

Dada la curva de transformación *cañones por mantequilla* siguiente ¿Cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de *A*?:

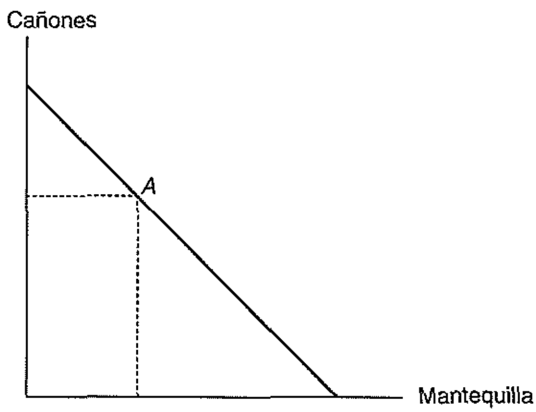

Figura 1.7

Al ser la frontera una línea recta la proporción de las unidades intercambiadas (el aumento de una de uno implica la reducción de una del otro) de un bien y otro que muestra es constante y en este caso unitaria por construcción, al formar la frontera un ángulo de 45° con los ejes; es decir, que el ratio de las variaciones de las unidades de mantequilla y cañones es 1.

EJERCICIO 1.16.

Con la curva de transformación siguiente ¿cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de *A*?

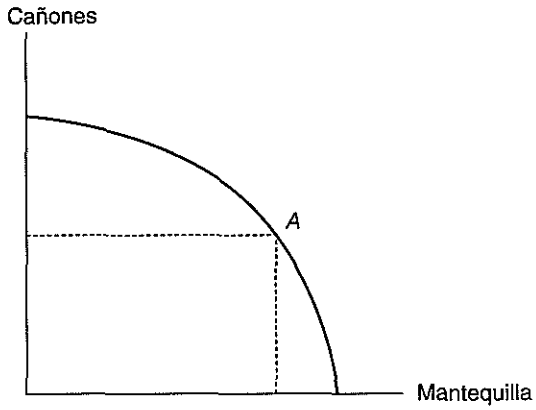

Figura 1.8

En este caso la curva de transformación o frontera de posibilidades de producción es cóncava respecto al origen de coordenadas. Por construcción se observa que el ratio es mayor que 1 (>1). Nótese que en el ratio el numerador aparecen los cañones y que el número de unidades de mantequilla es cada vez menor en la dirección de movimiento partiendo de *A* hacia la derecha (menor que 1), por lo que el cociente es mayor que la unidad.

EJERCICIO 1.17.

Con la curva de transformación siguiente ¿cuál es el coste de oportunidad de una unidad más de mantequilla partiendo de A?

En este caso (convexa) menor que 1 (< 1). Véanse las dos respuestas a los dos ejercicios previos.

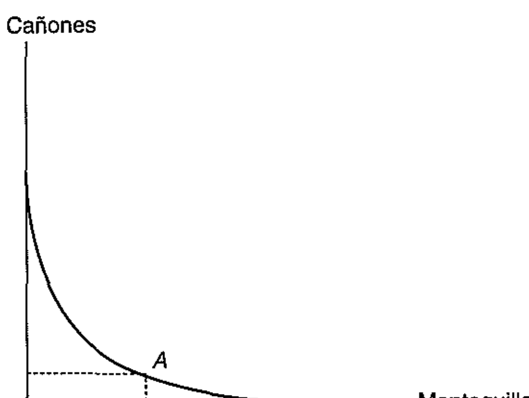

Figura 1.9

CAPÍTULO 2

Demanda, elasticidad e ingresos

Utilidad cardinal

EJERCICIO 2.1.

Supongamos que tengamos la siguiente configuración para un consumidor cardinal: $u_1 = 100$ «útiles» por semana, que $u_2 = 50$ «útiles», que $p_1 = 10$ y $p_2 = 5$ euros respectivamente. Supongamos que el precio del bien 2 cae a 2,5 euros. ¿Cuál sería la reacción de consumo del sujeto?

Sabemos que en el equilibrio deberá cumplirse en ese contexto para los datos del enunciado que:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{100}{10} = \frac{50}{5} = 10 \text{ útiles}$$

Con la variación en el precio del bien 2, descendiendo a 2,5 útiles, el sujeto sigue derivando 10 útiles por euro del primer bien, pero para el segundo la ratio ha subido a 20. Luego aumentará la demanda del bien 2, reduciendo su utilidad marginal por útil y presumiblemente el proceso no se detendrá hasta que se obtenga de nuevo la igualdad. Aunque esto último no lo había preguntado el enunciado, porque sólo se planteaba la reacción de consumo ante la subida del precio.

EJERCICIO 2.2.

Dibuje los gráficos de la restricción presupuestaria y el conjunto factible definidos por: $p_1x_1 + p_2x_2 = y$, si los precios son $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, y la renta, $y = 4$, para los siguientes casos: a) aumentan los precios y la renta en la misma proporción; b) el consumidor recibe una herencia de dos unidades de renta; c) existe una *oferta* del bien 1, por el que se regalan las dos primeras unidades, y; d) se produce un descuento del 50 por ciento en el precio del bien 2.

Es inmediato que la restricción se puede escribir, en ausencia de ahorro, como:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

por lo que tomando los casos extremos siguientes:

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = 4$$

$$x_1 = 0 \qquad 2x_2 = 4 \qquad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

la misma queda establecida geométricamente, en la figura 2.1. Nótese, que al ser una restricción presupuestaria recta, basta obtener dos puntos de la misma, por ejemplo los extremos. La pendiente de la restricción presupuestaria es:

$$-\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{1}{2}$$

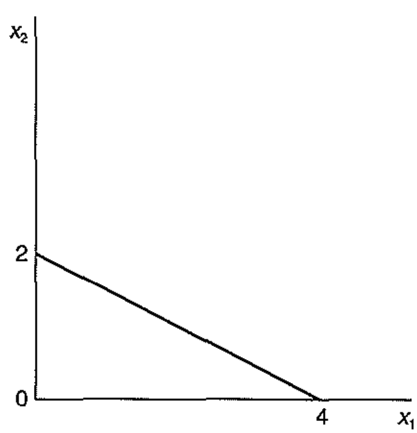

Figura 2.1

Los casos del enunciado se entienden como alternativos.

a) Aumentan precios y renta en la misma proporción, por ejemplo en un 100 por ciento, al cambiar el gobierno la unidad de cuenta multiplicándola por dos, entonces:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

y del mismo modo que antes:

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

es decir, las cantidades permanecen inalteradas, como sabemos por la teoría.

b) El consumidor recibe mediante herencia 2 unidades. La renta o disponibilidad para el gasto queda suplementada en dos unidades, por lo que su representación es:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

La pendiente no ha variado, porque los precios no lo han hecho, pero las cantidades obviamente si, siendo las máximas potenciales:

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = 6$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3$$

mayores –lógicamente– al haber aumentado la renta *caeteris paribus*, que las anteriores, figura 2.2.

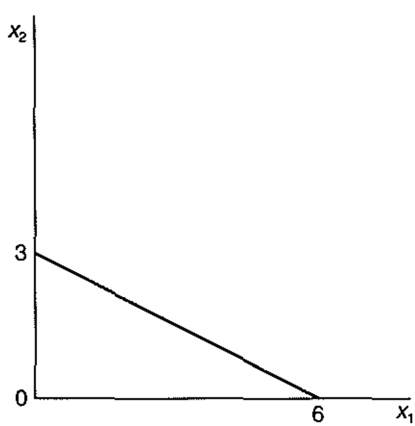

Figura 2.2

c) Hay una *oferta* del bien 1, por la que se regalan las dos primeras unidades, pagándose a su precio normal el resto de las unidades adquiridas. Es fácil observar el efecto, gráficamente (figura 2.3), sin que se requiera más comentarios; es como si el eje del bien 2 se hubiera desplazado hacia la derecha, y como se apareciera una recta de balance *marginal* (la recta de balance a partir de ese punto).

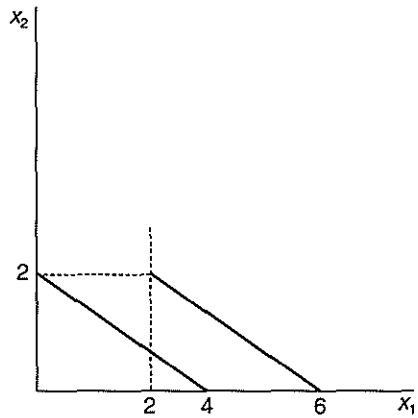

Figura 2.3

d) Se produce un descuento del 50% en el precio de bien 2, a partir de la primera unidad. La recta queda ahora modificada como figura 2.4:

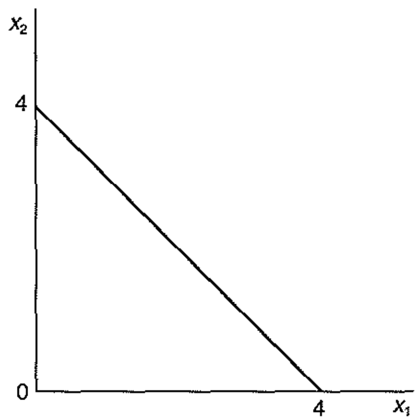

Figura 2.4

$$x_1 + x_2 = 4$$

Porque al modo habitual:

$$\text{si } x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$
$$\text{si } x_2 = 0 \qquad x_1 = 4$$

Función de utilidad: transformaciones

EJERCICIO 2.3.

Dada una función de utilidad ordinal, $u = f(x)$, donde x representa vectores o combinaciones de bienes, discuta si las siguientes son, o no, así mismo, funciones de utilidad admisibles: $2u$; u^3; $u + 5$; $\log u$; $\ln u$.

Lo son, al ser todas transformaciones monótonas de la primera. Si los índices de u son 1, 2, 3, 4, ..., los índices de $2u$ serían 2, 4, 6, 8. Lo mismo ocurre con las restantes transformaciones.

EJERCICIO 2.4.

Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente proposición, demostrándola matemáticamente: «las funciones de utilidad son relaciones monótonas crecientes, pero no tiene sentido hablar del crecimiento o decrecimiento de la utilidad marginal».

Si aumenta x_i, es decir la cantidad de un bien, todas las cantidades de los demás bienes constantes, u aumenta, es decir, la utilidad marginal, u_i, es positiva, siendo este signo igual para todas las funciones de utilidad –como un supuesto–, y para todas las representaciones posibles de las preferencias, salvo casos especiales en algún sentido, que se apreciarán en otros ejercicios. Pero la *tasa de variación* de la utilidad, *la variación de la variación*, la *magnitud* de la utilidad marginal, y el *signo* de la misma no son inequívocos para todas las funciones concebibles. En efecto, sea h una transformación monótona creciente de la función $u(x)$:

$$h = f[u(x)] \quad \text{siendo} \quad f' = \frac{df}{du} > 0$$

entonces:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = h_i = f' u_i$$

Y, como f' y u_i son ambas positivas, lo es también $\frac{\partial h}{\partial x_i}$, es decir, el signo de h_i es el mismo que el de u_i y ($h_i \neq u_i$). Ahora bien, la tasa de variación de h_i respecto de x_i lo proporciona la segunda derivada:

$$h_{ii} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_i}$$

Pero para ellas, ni el signo ni la magnitud son iguales para todas las funciones. En efecto:

$$h_{ii} = f''u_i + u_{ii}f'$$

y el signo de h_{ii} será el mismo que el de u_{ii}, si y sólo si:

$$f'' = \frac{\partial h}{\partial x_i} = h_i = f'u_i$$

ya que tanto u_i como f' son ambas positivas. No *tiene sentido,* por tanto, afirmar nada, a priori, sobre el *crecimiento* o decrecimiento de u_i, es decir, de la utilidad marginal. Sí, en cambio, como es habitual, sobre su positividad[3].

$$f'' = \frac{d^2f}{du^2} = 0$$

Relación marginal de sustitución

EJERCICIO 2.5.

Discuta el significado de la siguiente proposición: «si la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien uno es igual a 2, significa que el consumidor está dispuesto a ceder 2 unidades del bien 2, para obtener 1 del 1». Verdadero o falso y por qué.

La relación marginal de sustitución se define como:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} \quad \text{o} \quad RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

Y son el límite de los incrementos del bien 2 (1) por una unidad de 1 (2) respectivamente, siempre a lo largo de una curva de indiferencia, es decir, para un nivel de utilidad constante; en rigor siempre que la variación del denominador sea una unidad (variación) infinitesimal. Por ello, a veces se dice que la relación marginal de sustitución, es decir, la pendiente de la curva de indiferencia en un punto indica la *inclinación a pagar* por parte del consumidor, naturalmente expresada en unidades físicas o lo que es lo mismo expresada en cantidades de bienes. La curva

[3] La relación marginal de sustitución, que analizaremos en el siguiente problema, al ser un cociente, está libre de esta ambigüedad:

$$RMS_j^i = -\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{h_j}{h_i} = \frac{f' \cdot u_j}{f' \cdot u_i} = \frac{u_j}{u_i}$$

de indiferencia usualmente tiene pendiente negativa. Luego si la RMS_1^2 es igual a 2, ello quiere decir que la proposición del texto no es correcta:

$$RMS_1^2 = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

$$\Delta x_2 = 2\Delta x_1$$

En la figura 2.5 si el consumidor está situado en el punto A de la curva de indiferencia, el renunciar a una unidad del bien 1 (un movimiento hacia la izquierda), implica que está dispuesto a ceder, o ganar en este caso, $0{,}5\Delta x_1$ *unidades del bien* 2. Si Δx_1 es 1, es decir, una unidad, entonces está dispuesto a ganar el equivalente a 2 unidades del bien 1 en unidades del 2. O, inversamente si cede Δx_2, o una unidad del 2 –un desplazamiento hacia la derecha desde el punto inicial–, obtendrá 2 unidades del bien 1.

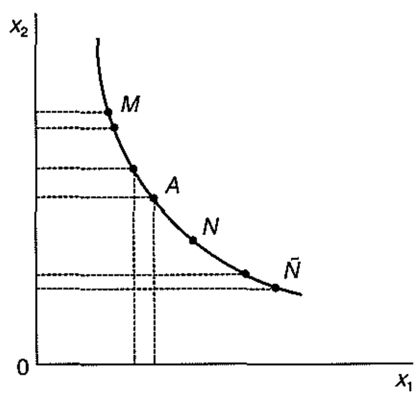

Figura 2.5

Otra cuestión –a no confundir con la anterior– es si hubiéramos tomado la relación marginal de sustitución inversa, es decir, del 1 por el 2. Si hubiese sido $RMS_2^1 = 2$, entonces el consumidor estaría dispuesto a ceder 2 unidades del 2 por 1 del 1.

Por otro lado, y en este caso, la relación marginal de sustitución es constante; o, mejor dicho, con más rigor, tomada en un punto de la curva de indiferencia. Pero sabemos que puede ser variable en otros; para una curva de indiferencia estrictamente convexa hacia el origen, es decreciente a lo largo de la misma, si nos movemos de izquierda a derecha, es decir cediendo unidades del bien 1. En la Figura 2.5 y el punto M, el consumidor dispone de *mucho* x_2 *por lo que estará* dispuesto a ceder «mucho» de él por una unidad del 1; en N la relación de valoración es aproximadamente equivalente para ambos bienes, porque lo son las disponibilidades de ambos bienes; y, finalmente, en $\tilde{N}$ se ha invertido la situación inicial.

EJERCICIO 2.6.

Comente la siguiente proposición: «el precio de un bien en el equilibrio, indica la cantidad de otro bien que el consumidor está dispuesto a entregar, para obtener una cantidad infinitesimal del primero».

La proposición es cierta. Sabemos que la curva de demanda $x_i = F(p_i)$, se puede escribir en su forma inversa como $p_i = f(x_i)$, pero también hemos derivado anteriormente que, en valor absoluto, la relación marginal de sustitución es igual al cociente invertido de los precios $RMS_i^j = \frac{p_i}{p_j}$ de donde, despejando $p_i = RMS_i^j p_j$ e igualando, $p_i = f(x_i) = RMS_j^i \cdot p_j$ que se cumple para los valores de equilibrio. Pero, recordando la interpretación que damos a la relación marginal de sustitución, podemos afirmar, si suponemos que el precio del bien j es 1, por simplificación, que el precio de i indica la cantidad de j que estaría dispuesto a entregar para obtener una pequeña (infinitesimal) cantidad de i, o serle entregado para desprenderse de dicha cantidad.

Convexidades: función de utilidad

EJERCICIO 2.7.

Sea una función de utilidad, $u = x_2 + ax_1$ donde a es un parámetro positivo. Analice la convexidad de la función.

Está claro que la ecuación es una línea recta. Dando valores extremos:

– si $x_1 = 0$ $\quad x_2 = u$

– si $x_2 = 0$ $\quad x_1 = \dfrac{u}{a}$

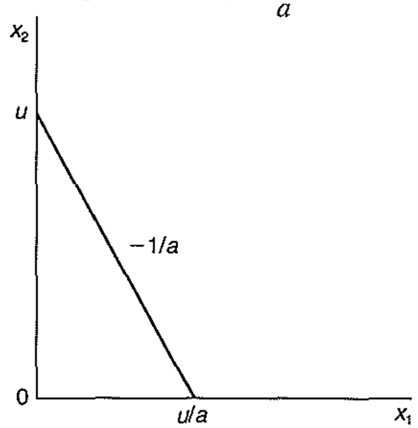

Figura 2.6

Operando, en el caso general (x_1 y x_2 ambos distintos de cero):

$$x_1 = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}x_2$$

la pendiente es:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1}{a} < 0$$

para nuestros supuestos; indica la tasa constante a la que el consumidor está dispuesto a intercambiar los dos bienes. Y la segunda derivada:

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = 0$$

luego es matemáticamente convexa en el sentido discutido en la teoría.

Equilibrio del consumidor y funciones de demanda

EJERCICIO 2.8.

Dada la función de utilidad (Cobb-Douglas) $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ halle las utilidades marginales, la relación marginal de sustitución y las funciones de demanda.

Calculando las derivadas parciales (utilidades marginales)

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2}.x_1^{-1/2}x_2^{1/2} > 0$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2}.x_2^{-1/2}x_1^{1/2} = \frac{x_1^{1/2}}{2x_2^{1/2}} > 0$$

ambas son positivas. Por otro lado:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{4}x_1^{-3/2}x_2^{1/2} < 0$$

es decir, la utilidad marginal es decreciente. La relación marginal de sustitución es fácil de obtener, sin más que sustituir:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial x}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\dfrac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{x_2^{1/2}x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}x_1^{1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

pero, como sabemos por teoría que debe cumplirse $RMS_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

y multiplicando:

$$p_2x_2 = p_1x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_2x_2 + p_1x_1 = 2p_2x_2 = 2p_1x_1$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

que son las funciones de demanda. Debe apreciarse que las demandas no son totalmente generalizadas, ya que la de cada bien depende de la renta y, tan sólo, del precio del propio bien, y no del precio de los demás bienes (en este caso del otro bien).

EJERCICIO 2.9.

Dada la función de utilidad $u = x_1^2x_2^2$ halle e interprete las utilidades marginales respecto a los dos bienes y sus variaciones. Compárelas con las del ejercicio anterior; halle también la relación marginal de sustitución y las funciones de demanda, y compárelas así mismo.

Sin más que derivar, obtenemos las utilidades marginales:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1x_2^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2x_1^2$$

ambas positivas. El crecimiento o decrecimiento, como ya sabemos, viene indicado por la derivada segunda, por ejemplo, respecto al bien 2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2x_1^2 > 0$$

la utilidad marginal es *creciente*, por tanto. Debe apreciarse que la función de utilidad es igual a la del ejercicio anterior elevada a 4 (o dos veces al cuadrado) Luego es una transformación monótona de aquella. Por otro lado:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{2x_1x_2^2}{2x_2x_1^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

pero como $RMS_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$, por el procedimiento ya conocido:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$p_2x_2 = p_1x_1$$

$$y = p_2x_2 + p_1x_1 = 2p_2x_2 = 2p_1x_1$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

que son idénticas a las del ejercicio anterior, con todas las implicaciones e interpretaciones. Nótese que hemos obtenido, en ambos casos, las funciones de demanda sin el recurso a la función auxiliar de Lagrange, e incluso adelantándonos a la discusión del equilibrio del consumidor, aspecto que discutimos en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 2.10.

Dada la función de utilidad, $u = x_1x_2$ hallar el equilibrio del consumidor individual y las funciones de demanda normales o marshallianas.

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = x_1x_2 + \lambda(y - p_1x_1 - p_2x_2)$$

y derivando, se obtienen las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = y - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

y despejando, por ejemplo:

$$x_1 = \lambda p_2 \qquad \lambda = \frac{x_1}{p_2}$$

que sustituida en la primera ecuación de las condiciones de primer orden:

$$x_2 - \left(\frac{x_1}{p_2}\right)p_1 = 0$$

permite obtener:

$$x_2 = \frac{x_1}{p_2}p_1 \qquad p_2x_2 = p_1x_1$$

Sustituyendo ahora en la restricción presupuestaria:

$$y - 2p_1x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1}$$

función de demanda para el bien 1; y análogamente para el bien 2:

$$x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

De donde hemos vuelto a obtener las funciones de demanda, pero a partir de un método más general (se aplica para cualquier número de bienes) que en los dos ejercicios anteriores. Estas son las funciones de demanda normales o marshallianas que dependen del precio y la renta. El multiplicador de Lagrange, que se puede demostrar es igual a la utilidad marginal de la renta (no lo demostramos aquí[4]), es en este caso:

$$\lambda = \frac{x_1}{p_2} = \frac{\frac{y}{2p_1}}{p_2} = \frac{y}{2p_1p_2}$$

[4] Véase, por ejemplo, Ahijado (1994).

Sustituyendo las cantidades demandadas en la función de utilidad, se puede obtener el valor del índice de utilidad, dado que los precios y la renta, se suponen conocidos:

$$u = x_1 x_2 = \frac{y}{2p_1}\frac{y}{2p_2} = \frac{y^2}{4p_1p_2}$$

EJERCICIO 2.11.

Sea un consumidor cuya función de utilidad viene descrita por $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ quien se enfrenta a unos precios paramétricos $p_1 = 3$, $p_2 = 4$ y cuya renta ha pasado de 90 unidades de cuenta a 180, obtenga geométricamente la curva renta-consumo y explicite si es creciente o decreciente. Discuta el carácter normal o inferior se ambos bienes.

De las condiciones de primer orden del problema de óptimo, sabemos que se halla:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

que en este caso es:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{3}{4}$$

$$4x_2 = 3x_1 \qquad x_2 = \left(\frac{3}{4}\right)x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 90 = 3x_1 + 4x_2$$

y para la expresión de x_2:

$$3x_1 + 4\frac{3}{4}x_1 = 90$$

$$x_1 = 15$$

Sustituyendo ahora en x_2:

$$x_2 = \frac{3}{4}x_1 = 11{,}25$$

Cuando la renta pasa a 180:

$$x_1 = \frac{180}{6} = 30$$

$$x_2 = 22{,}5$$

Como cuando aumenta la renta, aumenta el consumo de ambos bienes, la curva de renta–consumo es creciente.

Gráficamente:

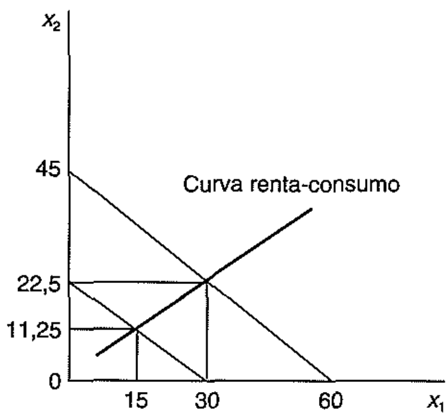

Figura 2.7

Como cuando aumenta la renta se produce un aumento en el consumo de ambos bienes, se puede afirmar que ambos son normales.

EJERCICIO 2.12.

Obtenga el equilibrio del consumidor y sus funciones de demanda para una función de utilidad Cobb-Douglas, $u = x_1^a x_2^b$.

El problema primal es, en este caso:

$$\text{máx} \quad u = x_1^a x_2^b$$

$$\text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

pero la función objetivo se puede escribir como:

$$\ln u = a \ln x_1 + b \ln x_2$$

por lo que el problema de óptimo, máximo ahora, se reescribe como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \ln u = a \ln x_1 + b \ln x_2 \\ \text{s.a.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 = y \end{aligned}$$

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = a \ln x_1 + b \ln x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - y)$$

se obtienen las condiciones de primer orden, al modo habitual:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{a}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad \frac{a}{x_1} = \lambda p_1 \qquad a = \lambda p_1 x_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{b}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \qquad \frac{b}{x_2} = \lambda p_2 \qquad b = \lambda p_2 x_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - y = 0$$

Sumando ahora a y b:

$$a + b = \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2) = \lambda y$$

de donde:

$$\lambda = \frac{a + b}{y}$$

y sustituyendo en las condiciones de primer orden; por ejemplo, en la primera:

$$\frac{a}{x_1} - \left(\frac{a + b}{y}\right) p_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{a}{a + b} \frac{y}{p_1}$$

función de demanda marshallianan, del bien 1. Por analogía se obtiene la del 2.

$$x_2 = \frac{b}{a + b} \frac{y}{p_2}$$

Estas funciones son típicas Cobb-Douglas, ya que no dependen de los precios de los demás bienes, como ya observamos antes, en este caso el otro bien, en tanto que sólo hay uno. Nótese la homogeneidad que presentan las funciones de demanda; en efecto, multiplicando los precios y la renta por, por ejemplo, μ:

$$x_1 = \frac{a}{a+b}\frac{\mu y}{\mu p_1} = \frac{a}{a+b}\frac{y}{p_1}$$

$$x_2 = \frac{b}{a+b}\frac{\mu y}{\mu p_2} = \frac{b}{a+b}\frac{y}{p_2}$$

las demandas quedan inalteradas, luego son homogéneas de grado cero. Debe apreciarse también que, si la función de demanda para el bien 2, es:

$$x_2 = \frac{b}{a+b}\frac{y}{p_2}$$

entonces, la participación de dicho bien en el gasto total es:

$$\frac{p_2 x_2}{y} = \frac{p_2}{y} x_2 = \frac{p_2}{y}\frac{b}{a+b}\frac{y}{p_2} = \frac{b}{a+b}$$

y por analogía:

$$\frac{p_1 x_1}{y} = \frac{p_1}{y} x_1 = \frac{p_1}{y}\frac{a}{a+b}\frac{y}{p_1} = \frac{a}{a+b}$$

Luego, el gasto en cada bien es una fracción constante de la renta, siendo la proporción establecida por el exponente correspondiente a cada bien en la función de utilidad original.

EJERCICIO 2.13.

Sea la función de utilidad, $u = \left(\frac{1}{4}\right) x_1 x_2$ halle las funciones de demanda y el índice de utilidad.

Por el procedimiento de ejercicios anteriores:

$$\text{máx} \quad \frac{1}{4} x_1 x_2$$

$$\text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$$

las condiciones de primer orden son, directamente:

$$u_1 = \frac{1}{4}x_2$$

$$u_2 = \frac{1}{4}x_1$$

de donde:

$$\frac{\frac{1}{4}x_2}{p_1} = \frac{\frac{1}{4}x_1}{p_2}$$

y

$$p_2x_2 = p_1x_1$$

o

$$2p_1x_1 = 2p_2x_2 = y$$

por lo que las funciones de demanda son:

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

En este caso, el parámetro $\frac{1}{4}$ es un multiplicador que varía el valor del índice de utilidad, para unas x_1 y x_2 dadas. No altera estas últimas ni, en consecuencia, el producto x_1x_2.

Efectos sustitución y renta

EJERCICIO 2.14.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$ los precios de los bienes $p_1 = 15$; $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$ cuando el precio del bien x_1 disminuye en una unidad el efecto renta de Slutsky es:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15$$

$$15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31$$

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación. Los nuevos precios son $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$. La combinación de bienes en donde el consumidor se situará nos vendrá dada por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 115$$

Con lo que:

$$x_1 = 6{,}07$$

y el efecto sustitución:

$$ES = 6{,}07 - 6 = 0{,}07$$

El efecto total se obtiene como:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 121$$

De donde:

$$x_1 = 6{,}28$$

$$ET = 6{,}28 - 6 = 0{,}28$$

y el efecto renta por diferencia:

$$ER = ET - ES = 0{,}28 - 0{,}07 = 0{,}21$$

EJERCICIO 2.15.

Sea una función de demanda de la familia Cobb–Douglas, $x_1 = \dfrac{y}{2p_1}$ suponga que la renta es 100 uu.cc. y que p_1 es 5 uu.cc.. Hallar x_1^0. Suponga después que el precio del bien 1 pasa a ser 2 uu.cc., entonces ¿x_1^1 será?. Calcule el efecto total y el efecto sustitución.

El valor de la demanda, dados los datos iniciales, es:

$$x_1^0 = \frac{y}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10$$

y, como el precio cae a 2, la demanda se reajusta a:

$$x_1^1 = \frac{y}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 2} = 25$$

El efecto total de la variación en el precio es.

$$x_1^1 - x_1^0 = 25 - 10 = 15$$

La renta ajustada para compensar el efecto de la caída en el precio, con p_2 constante, es:

$$\Delta y = x_1 \Delta p = 10(2 - 5) = -30$$

por lo que la renta ajustada es la inicial más-menos la compensación:

$$y^1 = y^0 + \Delta y = 100 - 30 = 70$$

y la demanda correspondiente a esa renta, y al nuevo precio es:

$$x_1^2 = \frac{y^1}{2p_1} = \frac{70}{2 \cdot 2} = 17{,}5$$

El efecto sustitución se calcula, por tanto, como la diferencia entre la cantidad demandada renta-compensada y la inicial:

$$x_1^s = x_1^2 - x_1^0 = 17{,}5 - 10 = 7{,}5$$

EJERCICIO 2.16.

Si la recta de balance de un consumidor es $y = p_1x_1 + p_2x_2 = 100 = 4 \cdot 15 + 2 \cdot 20$ y el precio del bien 1 cae un 25%, ¿cuál es el nuevo gasto nominal? ¿ cuál será la compensación por el método de Slutsky?:

La combinación inicial de demanda de los dos bienes es (15, 20) respectivamente, y la nueva recta de balance:

$$3 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 45 + 40 = 85$$

Luego al consumidor se le deben compensar 15 unidades monetarias negativas (100 − 85).

EJERCICIO 2.17.

Dada la función de utilidad $u = 2 \log x_1 + 4 \log x_2$ donde x_1 y x_2 son bienes. Si denominamos y a la renta, ¿entonces $\frac{du}{dy}$ es?

La función auxiliar es:

$$S = 2 \log x_1 + 4 \log x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

y las condiciones de primer orden:

$$\frac{2}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{4}{x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0$$

de donde:

$$\lambda = \frac{2}{x_1p_1} = \frac{4}{x_2p_2}$$

multiplicando:

$$2x_2p_2 = 4p_1x_1$$

$$x_2p_2 = 2p_1x_1$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = 3x_1p_1$$

obtenemos las funciones de demanda:

$$x_1 = \frac{y}{3p_1}$$

$$x_2 = \frac{2y}{3p_2}$$

que sustituidas ahora en la expresión para λ:

$$\lambda = \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{2}{x_1p_1} = \frac{6}{y}$$

Variaciones en los parámetros: curvas precio-consumo

EJERCICIO 2.18.

Sea un consumidor cuya función de utilidad viene descrita por $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$, quien se enfrenta a unos precios paramétricos $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, y cuya renta es de 90 unidades de cuenta. Si el precio del bien 1 pasa a ser 6 unidades, obtenga la curva precio-consumo, y establezca la curva de demanda.

De las primeras condiciones de óptimo:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

que en este caso es:

$$\frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{3}{4}$$

$$4x_2 = 3x_1 \qquad x_2 = \left(\frac{3}{4}\right)x_1$$

y sustituyendo en la ecuación presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 90 = 3x_1 + 4x_2$$

y para la expresión de x_2:

$$3x_1 + 4\frac{3}{4}x_1 = 90$$

$$x_1 = 15 \quad \text{y} \quad x_2 = 11{,}25$$

Si el precio del bien 1 pasa a ser de 6 unidades, entonces, la restricción presupuestaria cambia a:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 6x_1 + 4x_2 = 90$$

de donde, por el procedimiento ya bien conocido, las nuevas cantidades de equilibrio son:

$$x_1 = 7{,}5 \qquad x_2 = 11{,}25$$

Gráficamente:

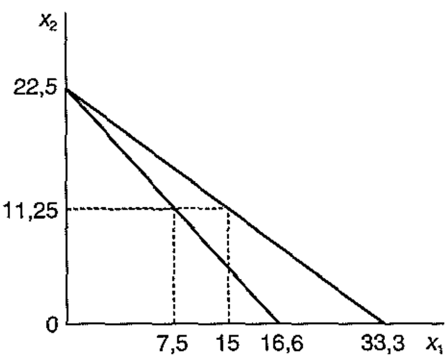

Figura 2.8

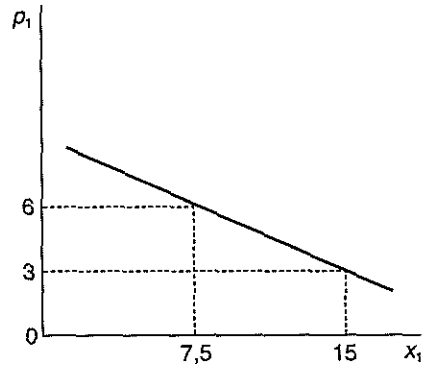

Figura 2.9

EJERCICIO 2.19.

Obtenga las demandas compensadas o hicksianas para la función de utilidad $u = x_1x_2$.

El problema dual del habitual problema de optimización del consumidor, de maximización, o primal, es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \overline{u} = x_1x_2 \end{aligned}$$

donde ahora la restricción anterior del problema primal es la función objetivo, e inversamente para la tradicional restricción. La función auxiliar de Lagrange correspondiente es:

$$S = p_1x_1 + p_2x_2 - \beta(x_1x_2 - \overline{u})$$

y las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = p_1 - \beta x_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = p_2 - \beta x_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = x_1x_2 - \overline{u} = 0$$

Operando:

$$p_1 = \beta x_2$$

$$p_2 = \beta x_1$$

y dividiendo una por otra:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

por lo que:

$$x_2 = x_1 \frac{p_1}{p_2}$$

Sustituyendo ahora en la restricción, en este caso recuérdese que es la función de utilidad y no la recta de balance:

$$x_1x_2 - \overline{u} = 0 = x_1\left(x_1 \frac{p_1}{p_2}\right) - \overline{u}$$

y operando:

$$x_1^2 \frac{p_1}{p_2} = \overline{u} \qquad x_1^2 = \overline{u}\frac{p_2}{p_1}$$

se obtiene:

$$x_1 = \sqrt{\overline{u}\frac{p_2}{p_1}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\overline{u}\right)^{1/2}$$

que no es sino la función de demanda del bien 1. Por analogía, x_2 es:

$$x_2 = \sqrt{\overline{u}\frac{p_1}{p_2}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\overline{u}\right)^{1/2}$$

El multiplicador de Lagrange, en consecuencia, es:

$$\beta = \frac{p_1}{x_2} = \frac{p_1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\overline{u}\right)^{1/2}} = \frac{p_1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/2}\overline{u}^{1/2}}$$

Pero, debe repararse que son las funciones de demanda compensadas o hicksianas, y el multiplicador de Lagrange, correspondiente. Estas dependen ahora de los precios de los dos bienes y de la utilidad constante.

Caracterización de los bienes: complementarios y sustitutivos

EJERCICIO 2.20.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$, caracterice a los bienes en complementarios o sustitutivos brutos, o independientes.

Sabemos que a este tipo de funciones, y sus transformaciones monótonas, le corresponden funciones de demanda del tipo:

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{y}{2p_2}$$

A simple vista ya se observa la independencia. Aplicando la elasticidad cruzada de demanda se corrobora la observación:

$$E_{12} = -\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0$$

ya que:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$$

Sabemos que, en el caso general, si E_{ij} *mayor o menor que cero*, serán respectivamente sustitutivos o complementarios brutos. Nótese, por último, que la elasticidad directa es:

$$E_{11} = -\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{-2y}{(2p_1)^2}\frac{p_1}{x_1} = \frac{y}{2p_1}\frac{1}{x_1} = 1 > 0$$

EJERCICIO 2.21.

Demostrar que x_1 y x_2 no pueden ser a la vez bienes inferiores.

Un bien es inferior cuando:

$$\frac{dx}{dy} < 0$$

Por otra parte, tenemos:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

considerando a p_1 y p_2 constantes:

$$dy = p_1dx_1 + p_2dx_2$$

$$1 = p_1\frac{dx_1}{dy} + p_2\frac{dx_2}{dy}$$

Si $\frac{dx_1}{dy}$ y $\frac{dx_2}{dy}$, fuesen ambas menores que cero, nunca la suma de los dos componentes del segundo miembro de la ecuación anterior daría un valor positivo (ya que los precios son positivos axiomáticamente) Luego no pueden ser ambos bienes inferiores.

Propiedades de las funciones de demanda

EJERCICIO 2.22.

Para un consumidor cuya función de utilidad es una de la familia Cobb-Douglas, del tipo $u = x_1^2 x_2^2$, obtenga la simetría de los efectos sustitución cruzados y la negatividad del efecto sustitución propio.

Sabemos ya que, por el método habitual de maximización, se cumple para este tipo de funciones:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 = p_2x_2 = 2p_1x_1 = 2\,p_2x_2$$

$$x_1 = \frac{y}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{y}{2p_3}$$

1. La demostración de la simetría de los efectos sustitución cruzados, si existe en este caso, se obtiene con carácter general de las llamadas ecuaciones de Slutsky-Hicks respectivas, que descomponen los efectos parciales de una variación en el propio precio o en los demás precios (caso general):

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{\bar{u}} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial y}$$

   donde, sin más que reordenar e igualar:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial y} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial y}$$

Aplicándolo ahora al caso de los bienes, 1 y 2, del ejercicio, basta calcular las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{2p_1}{(2p_1)^2} = \frac{1}{2p_1}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{2p_2}{(2p_2)^2} = \frac{1}{2p_2}$$

De donde, sustituyendo:

$$0 + x_2\frac{1}{2p_1} = 0 + x_1\frac{1}{2p_2}$$

$$\frac{x_2}{p_1} = \frac{x_1}{p_2}$$

2. La negatividad del efecto sustitución propio:

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} + x_i\frac{\partial x_i}{\partial y}\right) < 0$$

que para el caso actual:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-2y}{(2p_1)^2} = \frac{-y}{2p_1^2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_1}{\partial y} = \left(\frac{-y}{2p_1^2} + \frac{x_1}{2p_1}\right) = \frac{\frac{-y}{2}}{2p_1^2} < 0$$

luego se cumple la propiedad.

EJERCICIO 2.23.*

Obtenga e interprete las funciones de demanda asociadas a la función de utilidad $u = \ln x_1 + x_2$, así como las propiedades usuales de las mismas.

La función se comportaría simétricamente para el bien 2 si la función fuese:

$$u = x_1 + \ln x_2$$

sólo que la manera en que miramos los ejes coordenados, con el bien 1 en el eje de abcisas, invita a llevar a cabo el análisis del bien 1.

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = \ln x_1 + x_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

las condiciones de primer orden son, en este caso:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0$$

De donde es fácil, por el método habitual, obtener:

$$\frac{\frac{1}{x_1}}{1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{x_1} \qquad x_1 = \frac{p_2}{p_1}$$

La cantidad demandada del bien 1 depende, por tanto, de los dos precios, pero no depende, es decir, es independiente de, la renta, luego no presenta efectos renta; del precio del primero de forma inversa como es de esperar, y del segundo de forma directa. Sustituyendo ahora en la restricción presupuestaria[5]:

$$p_2 + p_2x_2 = p_2(1 + x_2) = y$$

por lo que, despejando:

$$1 + x_2 = \frac{y}{p_2}$$

$$x_2 = \frac{y}{p_2} - 1$$

Se aprecia que x_2 depende de su propio precio de forma inversa, y de la renta de forma directa (compárese por ejemplo, con las funciones de demanda que surgen de una función de utilidad

[5] Para este tipo de preferencias, es útil interpretar el bien 2 como renta a consumir en otros bienes, de modo que cuando aumenta la renta no necesariamente aumenta la cantidad demandada del bien bajo análisis.

Cobb-Douglas estricta). Y, además, como la función de utilidad es del tipo Cobb-Douglas es también independiente del otro precio. Las propiedades de las funciones de demanda, en este caso, son:

1. *Homogeneidad de grado cero en precios y renta.* Multiplicando precios y renta por λ:

$$x_1 = \frac{\lambda p_2}{\lambda p_1} = \frac{p_2}{p_1} = x_1$$

$$x_2 = \frac{\lambda y}{\lambda p_2} - 1 = x_2$$

   luego se cumple. Por el teorema de Euler, podemos generalizar, de modo que[6]:

$$E_{11} + E_{12} + E_{1y} = 0$$

$$E_{21} + E_{22} + E_{2y} = 0$$

   que en este caso es:

$$\frac{-p_2}{p_1^2}\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_1}{p_1^2}\frac{p_2}{x_1} + 0 = \frac{-p_2}{p_1 x_1} + \frac{p_2}{p_1 x_1} = 0$$

   luego se cumple la propiedad.

2. *Aditividad o condición de agregación de Engel.* La suma de las elasticidades renta ponderadas por la participación en el gasto de cada bien en el gasto total es igual a la unidad. En efecto, en este caso:

$$0\frac{y}{x_1}\frac{p_1 x_1}{y} + \frac{y}{p_2 x_2}\frac{p_2 x_2}{y} = 1$$

3. *Negatividad de los efectos sustitución.* A partir de la ecuación de Slutsky:

$$\underset{ET}{\frac{\partial x_i}{\partial p_j}} = \underset{ES}{\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}}} - \underset{ER}{x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}}$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}$$

[6] Ver Ahijado (1994).

en el caso del bien 1, no generalizada:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_1}{\partial y} = \left(\frac{-p_2}{p_1^2} + 0\right) < 0$$

y en el del 2, no generalizada:

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + x_2\frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{-y}{p_2^2} + x_2\frac{1}{p_2} = \left(-\frac{y}{p_2^2} + x_2\frac{1}{p_2}\right) < 0$$

4. Simetría de los efectos sustitución cruzados. La propiedad afirma que:

$$\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_{\bar{u}} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}}$$

Es casi inmediato que se cumple:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{1}{p_1}$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{1}{p_1} = 0 + x_1\frac{1}{p_2} = \frac{p_2}{p_1}\frac{1}{p_2}$$

Gráficamente, figura 2.10 la recta renta-consumo, puntos de tangencia de las curvas de indiferencia y las rectas de balance –que a su vez es una curva de Engel implícita– es vertical. La curva de Engel para el bien 1 es completamente vertical a su eje, es decir, el efecto renta es nulo; un aumento en la renta no produce aumento alguno en la cantidad demandada de ese bien. Lo cual es aplicable a numerosos bienes de los habitualmente demandados en el mundo real, para cada tramo de renta. El bien uno es constante, y el 2 aumenta proporcionalmente, es decir, la función de demanda es lineal en la renta.

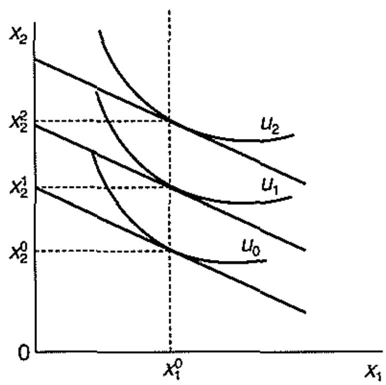

Figura 2.10

EJERCICIO 2.24.

Compruébese que las siguientes funciones definen la utilidad del mismo consumidor $u = (x_1 - 2)(x_2 - 4)$, $W = 32 - 16x_1 - 8x_2 + 4x_1x_2$.

Para que definan la misma función de utilidad, las condiciones de primer y segundo orden deberán ser invariables cualquiera que sea el índice elegido. Si suponemos una renta del sujeto, dada tal que se cumpla que $y = 3x_1 + 5x_2$ entonces, formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = (x_1 - 2)(x_2 - 4) + \lambda(y - 3x_1 - 5x_2)$$

y obteniendo las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = (x_2 - 4) - 3\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{x_2 - 4}{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = (x_1 - 2) - 5\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{x_1 - 2}{5}$$

(ignoramos la relativa a la restricción) e igualando obtenemos ley de las utilidades marginales ponderadas:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{x_2 - 4}{3} = \frac{x_1 - 2}{5}$$

Para la segunda función de utilidad tenemos:

$$S = 4x_1x_2 - 8x_2 - 16x_1 + 32 + \lambda(y - 3x_1 - 5x_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 4x_2 - 16 - 3\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{4x_2 - 16}{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = 4x_1 - 8 - 5\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{4x_1 - 8}{5}$$

La condición de primer orden será:

$$\frac{W_1}{p_1} = \frac{W_2}{p_2} \qquad \frac{4x_2 - 16}{3} = \frac{4x_2 - 8}{5};\ \frac{4(x_2 - 4)}{3} = \frac{4(x_1 - 2)}{5}$$

que es invariante respecto de la primera función de utilidad.

EJERCICIO 2.25.*

Determinar si las siguientes funciones de utilidad tienen o no curvas de indiferencia convexas: $u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $u = x_1x_2 + 2x_1x_2$.

1. Comencemos por la primera:

$$u = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Dando un valor determinado a u, $u = \bar{u}$ queda una hipersuperficie de utilidad:

$$x_3 = \frac{\bar{u} - x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

$$x_2 = \frac{\bar{u} - x_1x_3}{x_1 + x_3}$$

$$x_1 = \frac{\bar{u} - x_2x_3}{x_2 + x_3}$$

Dando ahora en la segunda ecuación un valor a x_3, digamos $\bar{x}_3$ queda una curva de indiferencia en el plano $(x_1; x_2)$:

$$x_2 = \frac{\bar{u} - \bar{x}_3x_1}{\bar{x}_3 + x_1}$$

La convexidad exige que se cumpla:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\bar{x}_3(\bar{x}_3 + x_1) - (\bar{u} - \bar{x}_3x_1)}{(\bar{x}_3 + x_1)^2} = \frac{-(\bar{x}_3)^2 - \bar{x}_3x_1 - \bar{u} + \bar{x}_3x_1}{(\bar{x}_3 + x_1)^2} =$$

$$= \frac{-(\bar{x}_3)^2 - \bar{u}}{(\bar{x}_3 + x_1)^2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{2[(x_1) + 2\bar{x}_3](\bar{x}_3 + x_1)}{(\bar{x}_3 + x_1)^4} > 0$$

y en este caso no depende del valor de $\bar{u}$, luego sí es estrictamente convexa en el plano citado.

2. Para la segunda de las funciones del enunciado $u = x_1^\gamma x_2$ otra expresión que nos permite afirmar las condiciones de convexidad de las curvas es:

$$\frac{dRMS_2^1}{dx_2} < 0$$

$$RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{x_1^\gamma}{\gamma x_1^{\gamma-1} x_2}$$

de donde:

$$RMS_2^1 = \frac{x_1^\gamma}{\gamma x_1^{\gamma-1} x_2} = \frac{x_1}{\gamma x_2}$$

$$\frac{dRMS_2^1}{dx_2} = \frac{1}{\gamma x_2}\frac{dx_1}{dx_2} + \frac{-x_1}{\gamma x_2^2} \quad \text{pero} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{\gamma x_2}$$

$$\frac{dRMS_2^1}{dx_2} = -\frac{x_1}{\gamma^2 x_2^2} - \frac{x_1}{\gamma x_2^2} < 0$$

γ es positivo (si no lo fuera no se podría afirmar nada sobre la convexidad ya que $\left[\left(\frac{x_1}{\gamma^2 x_2^2}\right) < \left(\frac{x_1}{\gamma x_2^2}\right)\right]$ ambas en valor absoluto) se comprueba por tanto la convexidad de la curva.

3. Para la tercera de las funciones de que provee el enunciado, $u = x_1 + x_2 + 2x_1x_2$, utilizaremos un tercer método, el de los hessianos orlados:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -u_1 \\ u_{21} & u_{22} & -u_2 \\ -u_1 & -u_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

y como las derivadas parciales son:

$$u_1 = 1 + 2x_2 \qquad u_2 = 1 + 2x_1 \qquad u_{11} = 0 \qquad u_{22} = 0 \qquad u_{12} = 0$$

tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -(1+2x_2) \\ 2 & 0 & -(1+2x_1) \\ -(1+2x_2) & -(1+2x_1) & 0 \end{vmatrix} > 0$$

luego es convexa.

EJERCICIO 2.26.

Dada la función de utilidad del consumidor $u = (2x_1^2 + 2x_2^2)^3$ examinar si las curvas de indiferencia son convexas hacia el origen.

La condición de convexidad es:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$$

por lo que:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{3(2x_1^2 + 2x_2^2)^2 4x_1}{3(2x_1^2+2x_2^2)^2 2x_2} = -\frac{2x_1}{x_2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{2}{x_2} + \frac{2x_1 dx_2}{x_2{}^2 dx_1} = -\frac{2}{x_2} - \frac{2x_1 2x_1}{x_2^2 x_2} = -\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4x_1^2}{x_2^3}\right) < 0$$

expresión que es negativa para valores positivos de las cantidades, luego las curvas de indiferencia son cóncavas respecto del origen.

EJERCICIO 2.27.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 10)^2(x_2 + 5)^3$, obtener las funciones de demanda de los dos bienes.

Las condiciones de primer orden del problema de máximo son las ya archiconocidas:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

Las utilidades marginales son:

$$u_1 = 2(x_1 - 10)(x_2 + 5)^3$$

$$u_2 = 3(x_1 - 10)^2(x_2 + 5)^2$$

por lo que:

$$x_1 = \frac{y - p_2x_2}{p_1} \qquad x_2 = \frac{y - p_1x_1}{p_2}$$

operando:

$$\frac{2(x_2+5)}{3(x_1-10)} = \frac{p_1}{p_2} \qquad 2(x_2+5)p_2 = 3(x_1-10)p_1$$

$$x_2 = \frac{3x_1p_1 - 30p_1 - 10p_2}{2p_2}$$

$$x_2 = \frac{3(y - p_2x_2) - 30p_1 - 10p_2}{2p_2}$$

$$x_2 = \frac{3y - 30p_1 - 10p_2}{5p_2}$$

$$x_1 = \frac{2y + 30p_1 + 10p_2}{5p_1}$$

que son las funciones de demanda solicitadas.

EJERCICIO 2.28.

Hállese la demanda del bien x_1 en función de su precio, sabiendo que la función de utilidad es $u = (x_1 + 1)^{1/2}(x_2 + 2)^{1/2}$ y que el precio de x_2 es $p_2 = 4$ y la renta es igual a 72 unidades de cuenta.

Partiendo de las condiciones de equilibrio habituales:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

que en este caso implican:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(x_1+1)^{-1/2}(x_2+2)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}\right)(x_1+1)^{1/2}(x_2+2)^{-1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{(x_2+2)}{(x_1+1)} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{4}$$

$$4x_2 + 8 = p_1x_1 + p_1$$

y la ecuación de balance:

$$72 = p_1x_1 + 4x_2$$

obtenemos la función de demanda solicitada:

$$x_1 = \frac{80 - p_1}{2p_1}$$

EJERCICIO 2.29.*

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 3)(x_2 - 2)(x_3 - 1)$, establecer las relaciones de complementariedad o sustitución entre los bienes x_1 y x_2.

Obtengamos las funciones de demanda al modo habitual de las condiciones de primer orden de máximo:

$$\frac{(x_2 - 2)(x_3 - 1)}{(x_1 - 3)(x_3 - 1)} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{(x_2 - 2)(x_3 - 1)}{(x_1 - 3)(x_2 - 2)} = \frac{p_1}{p_3}$$

$$p_1x_1 - p_2x_2 = 3p_1 - 2p_2 \qquad p_1x_1 - p_3x_3 = 3p_1 - p_3 \qquad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = y$$

$$x_1 = \frac{y + 6p_1 - 2p_2 - p_3}{3p_1} \qquad x_2 = \frac{y - 3p_1 + 4p_2 - p_3}{3p_2} \qquad x_3 = \frac{y - 3p_1 - 2p_2 + 2p_3}{3p_3}$$

El criterio que se aplica para conocer las relaciones entre los bienes es estudiar el signo del efecto sustitución cruzado:

- Si $S_{12} = S_{21} > 0$ son sustitutivos.
- Si $S_{12} = S_{21} < 0$ son complementarios.
- *Si $S_{12} < 0$ son complementarios brutos.*

Por lo que es preciso hallar:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{D_{21}}{D} + x_2\frac{D_{31}}{D} \qquad \text{en las que} \qquad \frac{D_{21}}{D}$$

es igual al efecto S_{12}:

$$S_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} + x_2\frac{\partial x_1}{\partial y} \qquad \text{ya que} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y} = -\frac{D_{31}}{D}$$

Con los datos del problema:

$$S_{12} = -\frac{x_2 - 2}{3p_1} + x_2\left(\frac{1}{3}\right)p_1 \qquad \text{y de aquí} \qquad S_{12} = \frac{x_2 - 2}{3p_1}$$

La relación entre los bienes depende del valor que adpte x_2. Si $x_2 > 2$, los bienes serán sustitutivos; y si $x_2 < 2$, los bienes serán complementarios.

EJERCICIO 2.30.*

Compruébese con los datos del ejercicio anterior que $S_{11} = S_{21}$.

Se ha hallado que:-

$$S_{12} = \frac{x_2 - 2}{3p_1}$$

sustituyendo x_2 por su expresión en función de p_1, p_2, p_3 e y, queda:

$$S_{12} = \frac{y - 3p_1 - 2p_2 - p_3}{9p_1p_2}$$

Si se obtiene S_{21} de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + x_1\frac{\partial x_2}{\partial y}$$

Aplicando los datos resulta:

$$S_{21} = -\frac{1}{p_2} + x_1\left(\frac{1}{3p_2}\right)$$

o lo que es lo mismo:

$$S_{21} = \frac{x_1 - 3}{3p_2}$$

Sustituyendo x_1 por su expresión en función de p_1, p_2, p_3, y:

$$S_{21} = \frac{y - 3p_1 - 2p_2 - p_3}{9p_1p_2}$$

Expresión idéntica a la obtenida anteriormente.

EJERCICIO 2.31.

Dadas las relaciones marginales de sustitución entre bienes, $RMS_2^1 = \frac{x_1 + 5}{x_2 + 2}$ y $RMS_3^2 = \frac{x_2 + 2}{x_3 + 1}$ determinar el carácter de la asociación entre los bienes x_1 y x_2; x_1 y x_3; x_2 y x_3.

Las condiciones de primer orden genéricas son, de nuevo:

$$RMS_2^1 = \frac{x_1 + 5}{x_2 + 2} = \frac{p_2}{p_1} \qquad RMS_3^2 = \frac{x_2 + 2}{x_3 + 1} = \frac{p_3}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = y$$

de donde:

$$x_1 = \frac{y + 2p_2 + p_3 - 10p_1}{3p_1}$$

$$x_2 = \frac{y + 5p_1 + p_3 - 4p_2}{3p_2}$$

$$x_3 = \frac{y + 5p_1 + 2p_2 - 2p_3}{3p_3}$$

$$S_{12} = \frac{2}{3p_1} + x_2\frac{1}{3p_1} = \frac{2 + x_2}{3p_1} > 0$$

$$S_{31} = \frac{5}{3p_3} + x_3\frac{x_1}{3p_3} = \frac{5 + x_1}{3p_3} > 0$$

$$S_{23} = \frac{1}{3p_2} + x_2\frac{x_3}{3p_2} = \frac{1 + x_3}{3p_2} > 0$$

Elasticidad

EJERCICIO 2.32.

Si la elasticidad demanda precio de la demanda es $E = a + bp$, donde a y b son parámetros positivos, determinar la función de demanda.

Dada la fórmula de la elasticidad y la información del enunciado:

$$-\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = a + bp$$

o bien:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}a + bdp$$

De donde resulta, siendo C una constante arbitraria:

$$-\int\frac{dx}{x} = a\int\frac{dp}{p} + b\int dp + C$$

de donde:

$$-\ln x = a\ln p + bp + C$$

$$\ln(xp^a) = -bp - C \qquad x = p^a e^{-bp-C} \qquad xp^a = e^{-bp-C}$$

y haciendo $e^{-C} = k$, queda:

$$x = kp^a e^{-bp}$$

EJERCICIO 2.33.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = x_1 x_2^A$ $(A > 0)$ demostrar que ia curva de Engel es una línea recta.

Los puntos de tangencia de las rectas de balance y las curvas de indiferencia para unos precios dados y considerando la renta como variable es la curva de Engel. Y los puntos de dicha línea de expansión se obtienen de las condiciones de primer orden de máximo de la función de utilidad sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

que aplicadas a los datos del enunciado dan:

$$\frac{x_2}{Ax_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$Ap_1x_1 = x_2p_2$$

De la ecuación de balance $p_1x_1 + p_2x_2 = y$ obtendremos:

$$p_2x_2 = y - p_1x_1$$

sustituyendo:

$$x_1 = \frac{y}{p_1(A + 1)}$$

obtenemos la curva de Engel.

La elasticidad de la demanda con relación con la renta es:

$$E_{1y} = \frac{y}{x_1}\frac{dx_1}{dy} = \frac{1}{p_1(A + 1)}\frac{y}{\frac{y}{p_1(A + 1)}} = 1$$

La curva de Engel es una recta ya que su elasticidad es constante y coincide con la bisectriz del primer cuadrante.

EJERCICIO 2.34.

Los gustos de un sujeto se conocen por la función índice de utilidad:

$$u = \ln\,[(x_1 + 2)(x_2 + 10)]$$

hallar la ecuación que exprese la demanda del bien x_1 en función del precio y determinar para qué intervalos de éste la demanda es normal o anormal, rígida o elástica, para valores de $y = 30$ y $p_2 = 1$.

La expresión de la ley de las utilidades marginales, condición de primer orden de máximo:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

en este caso y para $p_2 = 1$ adopta la forma siguiente:

$$\frac{\dfrac{1}{(x_1+2)(x_2+10)}(x_2+10)}{\dfrac{1}{(x_1+2)(x_2+10)}(x_1+2)} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 + 10 = x_1p_1 + 2p_1$$

$$p_1x_1 - x_2 = 10 - 2p_1$$

Por otra parte la ecuación de balance es:

$$x_1p_1 + x_2 = 30$$

Y del sistema que forman las dos ecuaciones así halladas, se obtiene la función de demanda:

$$x_1 = \frac{20 - p_1}{p_1}$$

Su elasticidad es:

$$E_{11} = \frac{p_1}{\dfrac{20-p_1}{p_1}}\left(-\frac{20}{p_1^2}\right) = \frac{20}{20-p_1}$$

Se aprecia que la elasticidad es negativa y mayor en valor absoluto que la unidad para precios inferiores a 20. Como para precios superiores no está definida la demanda, puede decirse que la demanda se comporta como normal y elástica para, $0 < p_1 < 20$.

EJERCICIO 2.35.

Dada la función de demanda $x = \dfrac{60}{p+4} - 5$, calcular su elasticidad y comprobar que ésta crece al crecer el precio.

La elasticidad de la demanda con respecto al precio en valor absoluto, es decir, ignorando el signo convencional:

$$E = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$$

En este caso concreto al ser:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-60}{(p+4)^2}$$

se convierte en:

$$E = \left(\frac{p}{\dfrac{60}{p+4} - 5} \right) \left[\frac{-60}{(p+4)^2} \right] = \frac{-12p}{-p^2 + 4p + 32}$$

La elasticidad aparece como una función del precio. Para valores de los precios situados entre 0 y 8 ($0 < p < 8$), la elasticidad es negativa y la demanda es normal. Para cantidades superiores a 8 la demanda es positiva. La variación de la elasticidad al variar el precio se puede estudiar a través del valor de derivada de la elasticidad con respecto al precio:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{-12p^2 - 384}{(-p^2 + 4p + 32)^2} < 0$$

La variación en la elasticidad en valor absoluto tiene distinto signo que la variación en el precio.

Gastos de los consumidores e ingresos de los productores

EJERCICIO 2.36.

Dada la función de demanda $x = 96p^{-3/4}e^{-(p+16)/64}$ hallar para qué valor de x el gasto total es máximo.

Derivando en la expresión del ingreso total, que es igual al gasto total:

$$\frac{d(px)}{dp} = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x(1 - E)$$

El gasto será máximo cuando E sea igual a 1:

$$E = -\frac{p}{96p^{-3/4}e^{-(p+16)/64}} \left(\frac{96p^{-3/4}e^{-(p+16)/64}(48 + p)}{64p} \right) = \frac{48 + p}{64} = 1$$

de donde:

$$p = 16 \qquad x = 12$$

$$\frac{dx}{dp} = 96\left[p^{-3/4}e^{-(p+16)/64}\left(-\frac{1}{64}\right) - \frac{3}{4}p^{-7/4}e^{-7/4}e^{-(p+16)/64}\right] = 96(p^{-3/4}e^{-(p+16)/64})\left(\frac{48+9}{64p}\right)$$

EJERCICIO 2.37.

Dada una función de demanda de mercado como $x = Ap^{-E}$, establezca la variación de los ingresos totales cuando el precio aumenta (disminuye) a partir de uno inicial.

La función es del tipo elasticidad-constante que hemos apreciado en un ejercicio anterior. Para apreciar también el movimiento de la variación solicitada es conveniente multiplicar ambos miembros por p:

$$px = Ap^{-E+1}$$

que nos da directamente los ingresos totales en función del precio y de los parámetros. Operando:

$$IT = Ap^{-E+1} = \frac{A}{p^{E-1}}$$

lo que indica que la respuesta dependerá del valor de E. Si es mayor que la unidad aumentos (disminuciones) en p implican reducciones (aumentos) en I.

EJERCICIO 2.38.

Sea la función de demanda de elasticidad constante $x = \dfrac{ay^c}{p^b}$, siendo *a, b* y *c* parámetros, y donde la elasticidad precio es igual para cualquier valor de *p* e *y* obtener la elasticidad y la elasticidad renta.

Si escribimos la función como:

$$x = ap^{-b}y^c$$

y derivamos:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -bap^{-b-1}y^c = \frac{-b}{p}ap^{-b}y^c = \frac{-b}{p}x$$

por lo que:

$$E = -\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = (-)\frac{b}{p}x\frac{p}{x} = (-)b$$

que no depende ni del precio ni de la renta.

La elasticidad-renta es:

$$E_y = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{y}{x}$$

y como:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = cy^{c-1}ap^{-b} = \frac{c}{y}(ap^{-b}y^{c}) = \frac{c}{y}x$$

$$E_y = \frac{c}{y}x\frac{y}{x} = c$$

que tampoco depende de aquellas variables. Nótese que:

(i) La función no es lineal, es más compleja, y quizá más realista.

(ii) Indica que el efecto de las variaciones en el precio también depende de la renta, y análogamente, que el efecto de la renta sobre la demanda también depende del precio(s).

(iii) Y quizá más importante- es comparativamente fácil de estimar, especialmente en su forma logarítmica, que es lineal.

(Aunque debe apreciarse que en realidad es como la de las funciones Cobb-Douglas cuando $a = \frac{1}{2}$.)

EJERCICIO 2.39.

Establezca una expresión para la elasticidad de una curva de demanda de mercado lineal simple como $x = a - bp$, donde a y b son parámetros positivos, y las funciones de ingresos totales y marginales.

La elasticidad general es:

$$E = -\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x}\right) = (-b)\frac{p}{a - bp}$$

si E es igual -1:

$$-1 = -\frac{bp}{a - bp}$$

de donde:

$$bp = a - bp \qquad a = 2bp \qquad p = \left(\frac{a}{2b}\right)$$

- Si $E = \infty$ $\quad \infty = bp \quad p = \infty$
- Si $E = 0$ $\quad -bp = 0 \quad p = 0$

El ingreso total como, $I = px$, pero como, $p = f(x)$, entonces $p = \dfrac{a - x}{b}$, por lo que:

$$I = \frac{a - x}{b}x = \frac{ax - x^2}{b}$$

Por lo que el ingreso marginal, es decir, la variación del ingreso total ante una variación infinitesimal en la cantidad comprada, en suma, la derivada de I con respecto de x, se obtiene en este caso como:

$$I_m = \frac{a}{b} - \frac{2x}{b}$$

si, por otro lado, $I_m = 0$, lo que implica que $I = I_{\text{máx}}$, entonces:

$$\frac{a}{b} - \frac{2x}{b} = 0$$

por lo que:

$$x = \frac{a}{2}$$

EJERCICIO 2.40.

Sea la siguiente función de demanda $p = 100 - 10x$ hallar los gastos totales de los consumidores (ingreso totales de los productores), su gasto marginal (ingreso marginal de las empresas), y la elasticidad de la demanda clasificando los valores de la misma.

Debe observarse para comenzar que se trata de una función de demanda inversa, es decir en la que la cantidad aparece como variable independiente, y el precio la dependiente, contrariamente al caso directo más usual quizás, en la que dicha variable es la dependiente (y el precio la independiente). Como los gastos de los consumidores coinciden con los ingresos de los productores (empresas) nos referiremos a estos últimos, sin pérdida de generalidad:

El ingreso total es $IT = px$, por lo que en este caso sin más que sustituir:

$$IT = (100 - 10x)x = 100x - 10x^2$$

y el ingreso marginal (lo que varía el ingreso total ante una variación de la cantidad demandada en una unidad):

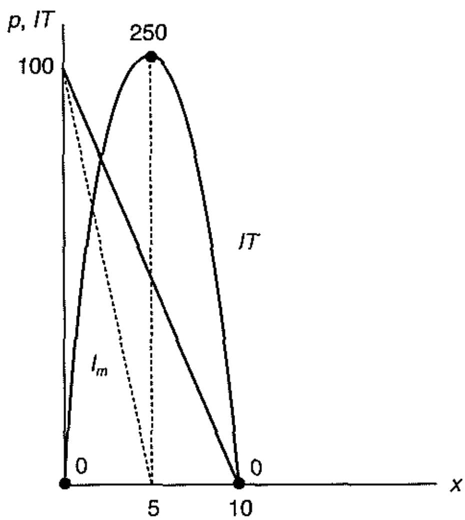

Figura 2.11

$$I_m = 100 - 20x = 0$$

de donde:

$$100 - 20x = 0 \qquad x = \frac{100}{20} = 5$$

Se sabe por la teoría que cuando el I_m es cero, el IT es máximo y la elasticidad de la demanda igual a 1. En efecto, cuando $x = 5$, $IT = px = 50 \cdot 5 = 250$, y:

$$E = \left(\frac{1}{\frac{dp}{dx}}\right)\frac{p}{x} = \frac{1}{10}\frac{50}{5} = 1$$

Elasticidad de sustitución

EJERCICIO 2.41.*

Dada la relación marginal de sustitución $RMS_2^1 = \dfrac{2x_1^{1/2}}{3x_2^{1/2}}$, hallar la elasticidad de sustitución.

Se sabe por problemas anteriores que:

$$RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{2x_1^{1/2}}{3x_2^{1/2}}$$

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \left(-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)x_1^{-1/2}}{3x_2^{1/2}}\right)\left(\frac{2x_1^{1/2}}{3x_2^{1/2}}\right) + \frac{2x_1^{1/2}3\left(\frac{1}{2}\right)x_2^{-1/2}}{(3x_2^{1/2})^2} = \frac{2 + 3x_1^{1/2}x_2^{-1/2}}{9x_2}$$

sustituyendo en la fórmula de la E_s resulta:

$$E_s = \frac{\frac{1}{x_1}\frac{4x_1}{9x_2} + \frac{1}{x_2}\frac{2x_1^{1/2}}{3x_2^{1/2}}}{\frac{2 + 3x_1^{1}2x_2^{-1/2}}{9x_2}} = \frac{4 + \frac{6x_1^{1/2}}{4x_2^{1/2}}}{2 + \frac{3x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}}} = \frac{2\left(2 + \frac{3x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}}\right)}{2 + \frac{3x_1^{1/2}}{x_2^{1/2}}} = 2$$

Se trata de comprobar que $E_1 = kE_{1y} + (1 - k)E_s$:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{nx_1}{nx_2} \qquad \frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \frac{nx_1(m + n)}{m^2x_2^2}$$

$$E_s = \frac{\frac{1}{x_1}\frac{n^2x_1^2}{m^2x_2^2} + \frac{1}{x_2}\frac{nx_1}{mx_2}}{\frac{nx(m + n)}{m^2x_2^2}} = \frac{nx_1(m + n)}{mx_1(m + n)} = 1$$

De la ley de la igualdad de las utilidades marginales ponderadas:

$$nx_1p_1 = mx_2p_2$$

junto con la ecuación de balance:

$$x_1p_1 + x_2p_2 = y$$

se obtiene la función de demanda para el bien x_1:

$$x_1 = \frac{\dfrac{ym}{(m+n)p_1}}{(m+n)p_2} \Rightarrow E_1 = \frac{-p_1}{y+n}\left(-\frac{ym}{(m+n)p_2}\right) = 1$$

En cuanto a la elasticidad renta resulta:

$$E_{1y} = \frac{y}{\dfrac{ym}{(m+n)p_1}} \frac{m}{(m+n)p_1} = 1$$

por otra parte como $k = \dfrac{p_1x_1}{y}$ la fórmula de Slutsky se convierte en:

$$1 = \frac{x_1p_1}{y} + 1 - \frac{x_1p_1}{y}$$

con lo que se comprueba el cumplimiento de la misma.

EJERCICIO 2.42.*

Dada la relación marginal de sustitución $RMS_2^1 = \dfrac{3(x_1+1)}{4(x_2+1)}$, los precios $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ y la renta del sujeto $y = 9$, comprobar que en la situación de equilibrio se cumple la fórmula de Slustky para el bien x_1.

Las condiciones de primer orden son:

$$RMS_2^1 = \frac{3(x_1+1)}{4(x_2+1)} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

de donde:

$$x_1 = \frac{4y + 4p_2 - 3p_1}{7p_1}$$

$$x_2 = \frac{3y + 3p_1 - 4p_2}{7p_2}$$

Por lo que la elasticidad de la demanda respecto al precio es, para x_1:

$$E_1 = -\frac{p_1}{\dfrac{4y + 4p_2 - 3p_1}{7p_1}}\left(-\frac{4y + 4p_2}{7p_1^2}\right) = \frac{4y + 4p_2}{4y + 4p_2 - 3p_1}$$

que para valores dados de los precios y la renta, toma el valor:

$$E_1 = \frac{36 + 12}{36 + 12 - 6} = \frac{8}{7}$$

La elasticidad de la demanda respecto a la renta es:

$$E_1 = \frac{y}{\dfrac{4y + 4p_2 - 3p_1}{7p_1}} \frac{4}{7p_1} = \frac{4y}{4y + 4p_2 - 3p_1}$$

que para los valores dados se concreta en $E_1 = \dfrac{6}{7}$.

Ahora corresponde determinar la elasticidad de sustitución:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{3(x_1 + 1)}{4(x_2 + 1)} \quad \frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \frac{21(x_1 + 1)}{16(x_2 + 1)^2}$$

$$E_s = \frac{\dfrac{1}{x_1}\dfrac{9(x_1 + 1)}{16(x_2 + 1)} + \dfrac{1}{x_2}\dfrac{3(x_1 + 1)}{4(x_2 + 1)}}{\dfrac{21(x_2 + 1)}{16(x_2 + 1)^2}} = \frac{3x_2(x_1 + 1) + 4x_2(x_2 + 1)}{7x_1x_2}$$

Sustituyendo en las funciones de demanda p_1, p_2 e y, por su valor, se convierten en las cantidades de equilibrio, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, que llevadas a la ecuación de la elasticidad de sustitución, la convierte en:

$$E_s = \frac{12+24}{21} = \frac{12}{7}$$

Teniendo en cuenta que:

$$k = \frac{p_1 x_1}{y} = \frac{32}{9} = \frac{2}{3}$$

$$(1-k) = \frac{1}{3}$$

entonces:

$$kE_{1y} + (1-k)E_s = \frac{2}{3}\frac{6}{7} + \frac{1}{3}\frac{12}{7} = \frac{8}{7} = E_l$$

EJERCICIO 2.43.*

Dada la función índice de utilidad $u = 3^{x_1^{1/2}} 9^{x_2^{1/3}}$, hallar la elasticidad de sustitución.

La fórmula es, como ya es conocido:

$$E_s = \frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)}{\frac{d^2x_1}{dy_2^2}}$$

por lo que aplicando los datos del enunciado:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} = -\frac{9^{x_2^{1/3}}\left(\frac{1}{3}\right)\ln x_2^{-2/3} 3^{x_1^{1/2}}}{3^{x_1^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\right)\ln x_1^{-1/2} 9^{x_2^{1/3}}} = -\frac{4x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}$$

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \frac{\partial\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_2} + \frac{\partial\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)}{\partial x_2} = \frac{-4\left(\frac{1}{2}\right)x_1^{-1/2}}{3x_2^{2/3}}\left(\frac{-4x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}\right) + \frac{4x_1^{1/2}3\left(\frac{2}{3}\right)x_2^{-1/3}}{9x_2^{2/3}} =$$

$$= \frac{8}{px_2^{4/3}} + \frac{8x_1^{1/2}}{9x_2^{4/3}} = \frac{8(1 + x_1^{1/2}x_2^{-1/3})}{9x_2^{4/3}}$$

$$E_s = \frac{\dfrac{1}{x_1}\left(-\dfrac{4x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}\right)^2 - \dfrac{1}{x_2}\left(-\dfrac{4x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}\right)}{\dfrac{8(1 + x_1^{1/2}x_2^{-1/3})}{9x_2^{4/3}}} = \frac{\dfrac{1}{x_1}1\dfrac{6x_1}{9x_1^{2/3}} + \dfrac{1}{x_2}\dfrac{4x_1^{1/2}}{3x_2^{2/3}}}{\dfrac{8(1 + x_1^{1/2}x_2^{-1/3})}{9x_2^{4/3}}}$$

multiplicando y dividiendo el segundo término del numerador por $3x_2^{2/3}$, queda:

$$\frac{\dfrac{16x_1}{9x_1^{2/3}} + \dfrac{1}{x_2}\dfrac{4x_1^{1/2}3x_2^{2/3}}{9x_2^{2/3}}}{\dfrac{8(1 + x_1^{1/2}x_2^{-1/3})}{9x_2^{4/3}}} = \frac{16 + 12x_1^{1/2}x_2^{-1/3}}{8(1 + x_1^{1/2}x_2^{-1/3})} = \frac{4x_2^{1/3} + 3x_1^{1/2}}{2x_2^{1/3} + 2x_1^{1/2}}$$

La elasticidad de sustitución aparece como una función de x_1 y de x_2.

Preferencia revelada

EJERCICIO 2.44.

Un consumidor registra los precios y las cantidades adquiridas de dos bienes en tres situaciones de mercado (tres configuraciones de precios), indicados por la siguiente tabla, donde los primeros subíndices denotan bienes y los segundos situaciones:

$$\boldsymbol{x_{11} = 40,\ x_{21} = 60;\ x_{12} = 60,\ x_{22} = 30;\ x_{13} = 80,\ x_{23} = 20}$$

$$\boldsymbol{p_{11} = 60,\ p_{21} = 40;\ p_{12} = 30,\ p_{22} = 60;\ p_{13} = 20,\ p_{23} = 60}$$

A los precios de la primera observación (60, 40), el consumidor eligió las cantidades del par (40, 60), siendo el gasto:

$$p_{11}x_{11} + p_{21}x_{21} = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 60 = 4.800 \text{ uu.cc.}$$

A esos mismos precios las cantidades, y los gastos de los otros dos lotes serían:

$$p_{11}x_{12} + p_{21}x_{22} = 60 \cdot 60 + 40 \cdot 30 = 4.800 \text{ uu.cc.}$$

$$p_{11}x_{13} + p_{21}x_{23} = 60 \cdot 80 + 40 \cdot 20 = 5.600 \text{ uu.cc.}$$

De este análisis se desprende que si bien el gasto de la tercera cesta a los precios vigentes resultaba superior, entre las otras dos cestas de mismo coste, el consumidor reveló preferida la primera, ya que la eligió.

2. Repitiendo el análisis de los gastos de las tres cestas, ahora a los precios de la segunda y terceras observaciones respectivamente, se aprecia que:

$$p_{12}x_{11} + p_{22}x_{21} = 30 \cdot 40 + 60 \cdot 60 = 1.200 + 3.600 = 4.800$$
$$p_{12}x_{12} + p_{22}x_{22} = 30 \cdot 60 + 60 \cdot 30 = 1.800 + 1.800 = 3.600$$
$$p_{12}x_{13} + p_{22}x_{23} = 30 \cdot 80 + 60 \cdot 20 = 2.400 + 1.200 = 3.600$$

y

$$p_{13}x_{11} + p_{23}x_{21} = 20 \cdot 40 + 60 \cdot 60 = 800 + 3.600 = 4.400$$
$$p_{13}x_{12} + p_{23}x_{22} = 20 \cdot 60 + 60 \cdot 30 = 2.400 + 1.800 = 4.200$$
$$p_{13}x_{13} + p_{23}x_{23} = 20 \cdot 80 + 60 \cdot 20 = 1.600 + 1.200 = 2.800$$

En el segundo bloque revela preferido la segunda respecto a la tercera cesta, ya que implican el mismo gasto, pero eligió la segunda. En el tercer bloque, aunque reveló preferida a la tercera, en realidad no son comparables, dado que implican distintos gastos, y la elegida presenta el menor de ellos. Sin embargo, por transitividad, dado que eligió la primera frente a la segunda en el primer bloque, y la segunda respecto a la tercera en el segundo, la primera se reveló implícitamente preferida a la tercera. La decisión, por tanto, parece coherente.

EJERCICIO 2.45.

Demuestre mediante preferencia revelada (para el caso de dos bienes) que el efecto sustitución debe ser siempre negativo.

Sean dos bienes x_1 y x_2 cuyos precios son p_1 y p_2, en dos situaciones que llamaremos 0 y 1. Por la teoría de la preferencia revelada, sabemos que las dos siguientes situaciones no pueden ser ciertas simultáneamente:

$$p_1^0x_1^0 + p_2^0x_2^0 > p_1^0x_1^1 + p_2^0x_2^1$$
$$p_1^1x_1^1 + p_2^1x_2^1 > p_1^1x_1^0 + p_2^1x_2^0$$

pero, si fuesen ciertas, ello implicaría que:

$$p_1^0x_1^0 + p_2^0x_2^0 \leq p_1^0x_1^1 + p_2^0x_2^1$$
$$p_1^1x_1^1 + p_2^1x_2^1 \leq p_1^1x_1^0 + p_1^1x_1^0$$

y sumando:

$$p_1^0x_1^0 + p_1^1x_1^1 \leq p_1^0x_1^1 + p_1^1x_1^0$$

por lo que[7]:

$$(p_1^1 - p_1^0)(x_1^1 - x_2^1) = 0$$

Agregación a la demanda de mercado

EJERCICIO 2.46.

Suponga dos consumidores cuyas funciones de utilidad sean $u(1) = 10x_{11}x_{12}$ y $u(2) = 20x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$, cuyas rentas respectivas son $y_1 = 100$ e $y_2 = 120$, siendo los precios de mercado $p_1 = 5$ y $p_2 = 6$, entonces ¿las cantidades demandadas individuales son (primer y segundo agente)?

Podríamos resolver el problema primero por partes, analizando el equilibrio para cada uno de los consumidores, y luego sumar. O discutirlo genéricamente, y aplicarlo luego a los datos del ejercicio. Veamos ambos procedimientos.

A) El primer consumidor debe cumplir, como ya sabemos, la siguiente expresión:

$$RMS_1^2(1) = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$u_1(1) = 10x_2 \qquad u_2(1) = 10x_1$$

ignorando ya el índice del consumidor:

$$\frac{10x_2}{10x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{6}$$

$$6x_2 = 5x_1$$

$$x_2 = \frac{5x_1}{6}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = 5x_1 + 5x_1 = 10x_1 = 100$$

$$x_1 = \frac{100}{10} = 10$$

$$x_2 = 8{,}3$$

[7] Nótese que multiplicando los dos paréntesis: $p_1^1x_1^1 - p_1^1x_1^0 - p_1^0x_1^1 + p_1^0x_1^0 < 0$.

Al repetir el procedimiento obtenemos las cantidades demandadas por el segundo consumidor.

B) El procedimiento genérico discurre de la siguiente forma. De maximizar la primera función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, ya sabemos por ejercicios anteriores, y al ser las funciones del tipo Cobb–Douglas, que se cumple:

$$x_{11} = \frac{y_1}{2p_1} \qquad x_{12} = \frac{y_1}{2p_2}$$

y análogamente para el segundo consumidor:

$$x_{21} = \frac{y_2}{2p_1} \qquad x_{22} = \frac{y_2}{2p_2}$$

Sería fácil ahora aplicar las fórmulas para los datos del ejercicio:

$$x_{11} = \frac{y_1}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10 \qquad x_{12} = \frac{y_1}{2p_2} = \frac{100}{2 \cdot 6} = 8{,}3$$

$$x_{21} = \frac{y_2}{2p_1} = \frac{120}{2 \cdot 5} = 12 \qquad x_{22} = \frac{y_2}{2p_2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

EJERCICIO 2.47.

Para los datos del ejercicio anterior $u(1) = 10x_{11}x_{12}$ y $u(2) = 20x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$, $y_1 = 100$ e $y_2 = 120$ con $p_1 = 5$ y $p_2 = 6$ obtener las demandas de mercado de los dos bienes.

Podríamos resolver el problema primero por partes, analizando el equilibrio para cada uno de los consumidores, y luego sumar. O discutirlo genéricamente, y aplicarlo luego a los datos del ejercicio. Veamos ambos procedimientos.

Sabemos que se cumple que:

$$x_{11} = \frac{y_1}{2p_1} = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10 \qquad x_{12} = \frac{y_1}{2p_2} = \frac{100}{2 \cdot 6} = 8{,}3$$

$$x_{21} = \frac{y_2}{2p_1} = \frac{120}{2 \cdot 5} = 12 \qquad x_{22} = \frac{y_2}{2p_2} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

Por lo que, sumando:

$$x_1^M = x_{11} + x_{21} = \frac{y_1}{2p_1} + \frac{y_2}{2p_1} = \frac{1}{2p_1}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2 \cdot 5}220 = 22$$

$$x_2^M = x_{12} + x_{22} = \frac{y_1}{2p_2} + \frac{y_2}{2p_2} = \frac{1}{2p_2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2 \cdot 6}220 = 18{,}3$$

El procedimiento, se puede apreciar, es de suma horizontal, es decir, suma de las cantidades respectivas demandadas por los consumidores, a los respectivos precios. Nótese que es como si, fuera un sólo consumidor que dispusiese de la renta de ambos. Obviamente se está utilizando un supuesto simplificador, que implica no prestar atención, entre otras cosas, a la distribución de la renta.

Sistemas lineales de gasto

EJERCICIO 2.48.*

Establezca la función de demanda (o sistema lineal de gasto) implícito en la función de utilidad $u = \ln (x_1 + h_1) + \ln (x_2 + h_2)$.

Obtengamos. Formando la función auxiliar de Lagrange, al modo ya conocido:

$$S = \ln (x_1 + h_1) + \ln (x_2 + h_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

Las condiciones de prmer orden son:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 + h_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2 + h} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - y = 0$$

Dividiendo las dos primeras entre sí:

$$\frac{x_2 + h}{x_1 + h} = \frac{p_1}{p_2}$$

De donde:

$$x_2 + h_2 = \frac{p_1}{p_2}(x_1 + h_1)$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}(x_1 + h_1) - h_2$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$p_1x_1 + p_2\left[\frac{p_1}{p_2}(x_1 + h_1) - h_2\right] = y$$

$$p_1x_1 + p_1x_1 + p_1h_1 - p_2h_2 = y$$

$$2p_1x_1 = y + p_2h_2 - p_1h_1$$

$$x_1 = \frac{y + p_2h_2 - p_1h_1}{2p_1}$$

Que se puede reescribir como:

$$x_1 = \frac{p_2h_2}{2p_1} + \frac{1}{2}\frac{y - p_1h_1}{p_1}$$

Y llamando m_1 al primer componente del segundo miembro como:

$$x_1 = m_1 + \frac{1}{2}\frac{y - p_1h_1}{p_1}$$

Función de demanda para el bien 1. Análogamente para x_2:

$$x_2 = m_2 + \frac{1}{2}\frac{y - p_2h_2}{p_2}$$

Debe apreciarse que la función de utilidad podría haber sido re-escrita como:

$$u = \ln\,[x_1 - (-h_1)][x_2 - (-h_2)]$$

Como ejercicio adicional, analice el efecto de hacer $h_1 = 4$ y $h_2 = 5$; y el mismo ejercicio para una función de utilidad que incluya $(x_3 + h_3)$, $(x_4 + h_4)$.

EJERCICIO 2.49.*

Establezca la función de demanda (sistema lineal de gasto) asociada a la función de utilidad $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln (x_i - h_i)$. Donde $x_i \geq h_i + 1$, $a_i > 0$ y $h_i > 0$.

Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln (x_i - h_i) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - y\right)$$

Y obteniendo sus condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{a_i}{x_i - h_i} - \lambda p_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - y = 0$$

Sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas (las cantidades demandadas y el multiplicador de Lagrange). Operando en las n primeras ecuaciones:

$$\frac{a_i}{x_i - h_i} = \lambda p_i$$

De donde:

$$\frac{a_i}{\lambda} = p_i(x_i - h_i) = p_i x_i - p_i h_i$$

Y sumando para n:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} p_i h_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = y$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\lambda} = y - \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{y - \sum_{i=1}^{n} p_i h_i}$$

Y sustituyendo λ en las primeras n condiciones de primer orden:

$$\frac{a_i}{x_i - h_i} - \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{y - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i h_i} \right) p_i = 0$$

Y despejando x_i, obtenemos:

$$x_i = h_i + \frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \frac{y - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i h_i}{p_i}$$

Es evidente que la demanda de un bien depende inversamente de su propio precio como es habitual. Nótese que h_i es independiente de los precios y la renta; se suele intepretar como un parámetro de subsistencia. Por otro lado, el ratio $\left(\frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \right)$ es la proporción o ponderación del gasto en cada bien en el gasto total. Por último, el término $\left(y - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i h_i \right)$ donde , es la renta menos valor de la subsistencia, $h_i \neq x_i$, y donde h_i no produce verdadera utilidad por encima de la mera subsistencia.

EJERCICIO 2.50.*

Para el sistema lineal de gasto $x_i = h_i + \frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \frac{y - \sum\limits_{i=1}^{n} p_i h_i}{p_i}$. Discuta la presencia o ausencia de bienes normales e inferiores, y si se cumple la propiedad de agregación de Engel.

Podemos medir estos conceptos a través de la elasticidad renta, que en este caso es:

$$E = \frac{\partial x_i}{\partial y} \frac{y}{x_i} = \left(\frac{a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} \frac{1}{p_i} \right) \frac{y}{x_i} > 0$$

Ya que se cumple:

$$E = \frac{a_i y}{\sum_{i=1}^{n} a_i p_i \left(h_i + \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \frac{y - \sum_{i=1}^{n} p_i h_i}{p_i} \right)}$$

Expresión en la que todos sus componentes son positivos, por lo que es positiva la expresión misma. En consecuencia, ello quiere decir que no es posible la presencia de bienes inferiores.

Por último, para que se cumpla la condición de agregación del enunciado, unos bienes tienen que tener elasticidad renta mayor que la unidad y otros inferiores a la unidad (para que se cumpla la restricción presupuestaria. Imponiendo que la expresión de la elasticidad renta anterior sea mayor que 1, entonces:

$$a_i y > a_i y + p_i h_i \sum_{i=1}^{n} a_i - a_i \sum_{i=1}^{n} p_i h_i$$

$$a_i \sum_{i=1}^{n} p_i h_i > p_i h_i \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} > \frac{p_i h_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i h_i}$$

Luego se cumple la ley de Engel.

Repasando conceptos varios

EJERCICIO 2.51.

Para un consumidor cuya función de utilidad es $u = x_1 x_2$ que se enfrenta a los siguientes datos de mercado $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, ¿x_1, antes y después de la variación en el precio, es?

Para el equilibrio inicial, que debemos tomar como referencia, se debe cumplir, como ya sabemos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{3}$$

$$3x_2 = 5x_1$$

$$x_2 = \frac{5}{3} x_1$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 5x_1 + \frac{5}{3}3x_1 = 100$$

$$10x_1 = 100 \qquad x_1 = 10$$

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$6x_I + 3x_2 = 100$$

$$x_1 = 8{,}33$$

EJERCICIO 2.52.

Con los datos del ejercicio anterior $u = x_1x_2$, $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, x_2, antes y después de la variación del precio, es? ¿Y el índice de utilidad?

Para el equilibrio inicial, que debemos tomar como referencia, se debe cumplir, como ya sabemos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{3} \qquad 3x_2 = 5x_1 \qquad x_2 = \frac{5}{3}x_1$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 = 5x_1 + \frac{5}{3}3x_1 = 100$$

$$10x_1 = 100 \qquad x_1 = 10 \qquad x_2 = 16{,}6$$

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$6x_1 + 3x_2 = 100$$

$$x_1 = 8{,}33 \qquad x_2 = 16{,}6$$

El índice de utilidad correspondiente a la combinación de equilibrio es:

$$u = x_1 x_2 = 10 \cdot 16{,}6 = 166$$

EJERCICIO 2.53.

Para un consumidor cuya función de utilidad es $u = x_1 x_2$ que se enfrenta a los siguientes datos de mercado: $y = 100$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, si el precio del primer bien pasa a ser 6 unidades, entonces, por el método de Hicks, deberá demandar respectivamente (x_1, x_2):

Sabemos por el ejercicio anterior que

$$x_1 = 10 \qquad x_2 = 16{,}6$$

Si ahora p_1 pasa a ser 6, por el mismo método:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{6}{3} = 2 \qquad x_2 = 2x_1 \qquad 6x_1 + 3x_2 = 100 \qquad x_1 = 8{,}33 \qquad x_2 = 16{,}6$$

Por el método de Hicks el índice de utilidad correspondiente a la combinación de equilibrio inicial es:

$$u = x_1 x_2 = 10 \cdot 16{,}6 = 166$$

luego para mantenerse sobre al misma curva de indiferencia, es decir, mantener ese nivel de utilidad, y desplazándose a lo largo de la misma, el consumidor, al nuevo precio del bien 1, deberá demandar:

$$u = x_1 2x_1 = 166 = 2x_1^2$$

y dado que sabemos que a los nuevos precios $x_2 = 2x_1$:

$$x_1 = 9{,}11 \qquad x_2 = 18{,}22$$

EJERCICIO 2.54.

Conocida la función de utilidad de un consumidor, dada por la expresión:

$$u = (x_1 + 2)^{1/2}(x_2 + 6)^{1/3}$$

¿la relación marginal de sustitución entre los bienes x_2 y x_1 (RMS_2^1) en el punto $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ es?

Deberá cumplirse que:

$$RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

En vez de trabajar con la función del enunciado, se trabaja más fácilmente con una función transformada de ésta, por ejemplo, con la transformación ln u:

$$\ln u = \frac{1}{2}\ln(x_1 + 2) + \frac{1}{3}\ln(x_2 + 6)$$

Por lo que aplicando las fórmulas iniciales, que implican tan sólo hallar las derivadas parciales respecto a la función de utilidad:

$$RMS_2^1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2(x_1 + 2)}{3(x_2 + 6)} \qquad RMS_2^1(6, 10) = \frac{2(6 + 2)}{3(10 + 6)} = 3$$

EJERCICIO 2.55.

Para los datos del ejercicio anterior $u = (x_1 + 2)^{1/2}(x_2 + 6)^{1/3}$ ¿cuál será la (RMS_1^2) en el mismo punto?

Es la relación inversa de la anterior. Deberá cumplirse que:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_1}{u_2}$$

Trabajando con la función transformada ln u:

$$\ln u = \frac{1}{2}\ln(x_1 + 2) + \frac{1}{3}\ln(x_2 + 6)$$

Por lo que aplicando las fórmulas iniciales, que implican tan sólo hallar las derivadas parciales respecto a la función de utilidad:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2(x_1 + 2)}{3(x_2 + 6)} \qquad RMS_1^2(6, 10) = \frac{2(6 + 2)}{3(10 + 6)} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 2.56.

Un consumidor acude a un mercado en el que los precios de los bienes x_1 y x_2 son $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$,con una renta monetaria de 100 unidades; sabiendo que los gustos del consumidor vienen dados por la función $u = (x_1 - 2)(x_2 - 5)$, entonces ¿las cantidades planeadas para maximizar la utilidad son?

La maximización de la utilidad exige que se cumpla como condición de primer orden, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}$$

$$\frac{x_2 - 5}{2} = \frac{x_1 - 2}{4}$$

$$y = p_1 x_1 + x_2 p_2 \qquad 100 = 2x_1 + 4x_2$$

de donde obtenemos por el método habitual:

$$x_1 = 21 \qquad x_2 = \frac{29}{2}$$

EJERCICIO 2.57.

Un consumidor cuyos gustos vienen representados por la función índice de utilidad $u = 20x_1^{1/2}x_2^{1/3}$ dispone inicialmente de las cantidades $x_1^0 = 15$ y $x_2^0 = 4$; con esas cantidades acude a un mercado en el que rigen los precios $p_1 = 12$ y $p_2 = 5$, entonces el valor de las combinaciones iniciales de bienes es:

El valor de las combinaciones iniciales en el mercado será:

$$15 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 200$$

EJERCICIO 2.58.

Un consumidor cuyos gustos vienen representados por la función índice de utilidad $u = 20x_1^{1/2}x_2^{1/3}$ dispone inicialmente de las cantidades $x_1^0 = 15$ y $x_2^0 = 4$; con esas cantidades acude a un mercado en el que rigen los precios $p_1 = 12$ y $p_2 = 5$, entonces ¿las cantidades x_1 y x_2 de equilibrio son?:

El valor de las combinaciones iniciales en el mercado será:

$$15 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 200$$

Las combinaciones que podrá adquirir pertenecerán a la recta de balance cuya ecuación es:

$$12x_1 + 5x_2 = 200$$

La combinación que maximice la utilidad del consumidor se obtendrá a partir de las ecuaciones de equilibrio que son la ley de las utilidades marginales ponderadas y la restricción presupuestaria:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$12x_1 + 5x_2 = 200$$

Operaremos con una función de utilidad transformada de la del enunciado:

$$\ln u = \ln 20 + \frac{1}{2} \ln x_1 + \frac{1}{3} \ln x_2$$

por lo que las utilidades marginales son:

$$u_1 = \frac{1}{2x_1} \qquad u_2 = \frac{1}{3x_2}$$

y construyendo el ratio de las utilidades marginales a los precios:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{3x_2}{2x_1} = \frac{12}{5}$$

que junto con la restricción presupuestaria:

$$12x_1 + 5x_2 = 200$$

permiten obtener:

$$x_1 = 10$$

$$120 + 5x_2 = 200$$

que permite obtener:

$$x_2 = 16$$

EJERCICIO 2.59.

Un consumidor cuyos gustos se conocen por la relación marginal de sustitución $RMS_2^1 = \sqrt{\dfrac{x_1 + 2}{4x_2}}$ si los precios de los bienes son $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y la renta monetaria $y = 126$, ¿las cantidades de equilibrio $(x_1; x_2)$ son?

Sabemos por la teoría que se debe cumplir en el equilibrio:

$$RMS_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

por lo que, con los datos del ejercicio:

$$\sqrt{\frac{x_1 + 2}{4x_2}} = \frac{2}{3} \qquad \frac{x_1 + 2}{4x_2} = \frac{4}{9}$$

simplificando:

$$9x_1 + 18 = 16x_2$$

que junto a la restricción presupuestaria:

$$126 = 3x_1 + 2x_2$$

determinan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; resolviéndolo:

$$x_1 = \frac{16}{9}x_2 - \frac{18}{9} = \frac{16}{9}x_2 - 2 = x_1$$

$$126 = 3\left(\frac{16}{9}x_2 - 2\right) + 2x_2 = \frac{22}{3}x_2 - 6$$

se obtienen las cantidades de equilibrio que maximizan la utilidad:

$$x_2 = 18 \qquad x_1 = 30$$

EJERCICIO 2.60.

Los gustos de un sujeto se representan por las relaciones marginales de sustitución: $RMS_2^1 = \frac{x_1 + 5}{2x_2 + 2}$, $RMS_3^2 = \frac{2x_2 + 7}{x_3 + 3}$. Si el consumidor dispone de una renta monetaria $y = 62$ con la que acude a un mercado cuyos precios son $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ¿las cantidades que adquiere de cada bien son?

Sabemos por la teoría que deberán cumplirse las igualdades de las relaciones marginales de sustitución con el cociente invertido de los precios respectivos, en este caso:

$$RMS_2^1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1} \qquad \frac{x_1 + 5}{2x_2 + 2} = \frac{3}{2}$$

$$RMS_3^2 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{p_3}{p_2} \qquad \frac{2x_2 + 7}{x_3 + 3} = \frac{5}{3}$$

por otro lado la restricción presupuestaria es en este caso:

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \qquad 62 = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

de donde simplificando obtenemos

$$2x_1 + 10 = 6x_2 + 6 \qquad x_1 = 3x_2 - 2$$

de la primera;

$$6x_2 + 21 = 5x_3 + 15$$

de la segunda, de donde despejando:

$$x_3 = \frac{6x_2 + 6}{5}$$

sustituyendo:

$$x_2 = 4 \qquad x_3 = 6 \qquad x_1 = 10$$

EJERCICIO 2.61.

Un consumidor con la función índice de utilidad, $u = x_1^{2/3}(x_2 + 4)^{1/2}(x_3 + 1)^{1/3}$ obtiene la máxima satisfacción de su renta monetaria $y = 73$ cuando adquiere 20 unidades del bien x_1, 6 del x_2 y 3 del x_3; ¿esto quiere decir que los precios que rigen en el mercado (p_1, p_2, p_3) son?

Buscamos una transformación de la función de utilidad que sea más sencilla:

$$\ln u = \frac{2}{3}\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln(x_2 + 4) + \frac{1}{3}\ln(x_3 + 1)$$

La condición de equilibrio exige, como ya es bien conocido, que se cumplan los ratios:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \frac{u_3}{p_3}$$

que aplicados a los datos del problema:

$$u_1 = \frac{2}{3x_1} \qquad \text{que con } x_1 = 20 \qquad u_1 = \frac{1}{30}$$

$$u_2 = \frac{1}{2(x_2 + 4)} \qquad \text{que con } x_2 = 6 \qquad u_2 = \frac{1}{20}$$

$$u_3 = \frac{1}{3(x_3 + 1)} \qquad \text{que con } x_3 = 3 \qquad u_3 = \frac{1}{12}$$

de donde tendremos:

$$\frac{1}{30p_1} = \frac{1}{20p_2} = \frac{1}{12p_3}$$

y

$$p_1 = \frac{20p_2}{30} \qquad p_3 = \frac{20p_2}{12}$$

La restricción presupuestaria, por otro lado, y en este caso adquiere la forma:

$$73 = 20p_1 + 6p_2 + 3p_3$$

$$73 = 20\left(\frac{20p_2}{30}\right) + 6p_2 + 3\left(\frac{20p_2}{12}\right)$$

Por lo que:

$$p_1 = 2 \qquad p_2 = 3 \qquad p_3 = 5$$

que, en efecto, agotan la renta para las cantidades demandadas del enunciado.

EJERCICIO 2.62.

Un consumidor acude al mercado y adquiere 28 unidades del bien x_1 y 8 del bien x_2. Sus gustos se conocen por la función: $u = 2^{(x_1+1)^{1/2}}16^{(x_2+2)^{1/2}}$ se sabe, además, que si el sujeto invierte todas las disponibilidades de renta-ingresos en el bien 1 obtiene 60 unidades de mismo, y si las gasta o invierte en el 2 puede obtener 15 unidades. Con todo esto ¿se puede afirmar que las cantidades demandadas brutas son?

En el equilibrio habrá de cumplirse que:

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}$$

como:

$$u = 2^{(x_1+1)^{1/2}}16^{(x_2+2)^{1/2}}$$

y tomando logaritmos:

$$\ln u = (x_1 + 1)^{1/2} \ln 2 + (x_2 + 2)^{1/2} \ln 16$$

y obteniendo las utilidades marginales:

$$u_1 = \frac{1}{2} \ln 2(x_1 + 1)^{-1/2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \ln 16(x_2 + 2)^{-1/2}$$

en consecuencia:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\ln 2\,(x_1 + 1)^{-1/2}}{\ln 16(x_2 + 2)^{-1/2}} = \frac{4(x_2 + 2)^{1/2}}{(x_1 + 1)^{1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Nótese que $\ln 16 = \ln 2^4$. Por otra parte de las dotaciones iniciales se obtiene:

$$\frac{y}{p_1} = 60 \qquad \frac{y}{p_2} = 15$$

de donde:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{4} \qquad \frac{(x_2 + 2)^{1/2}}{4(x_1 + 1)^{1/2}} = \frac{1}{4}$$

por lo que:

$$x_1 + 1 = x_2 + 2$$

Por otra parte podemos escribir la ecuación de balance de la siguiente manera:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1 + 4p_1x_2 = y = 60p_1$$

y dividiendo por p_1:

$$x_1 + 4x_2 = 60 \qquad 60 - 4x_2 = x_1$$

sustituyendo ahora:

$$60 - 4x_2 + 1 = x_2 + 2 \qquad 5x_2 = 59$$

$$x_2 = \frac{59}{5} = 11{,}8$$

$$x_1 = 12{,}8$$

que son las demandas brutas.

EJERCICIO 2.63.*

Un consumidor acude al mercado y adquiere 28 unidades del bien x_1 y 8 del bien x_2. Sus gustos se conocen por la función: $u = 2^{(x_1+1)^{1/2}}16^{(x_2+2)^{1/2}}$ se sabe, además, que si el sujeto invierte todas las disponibilidades de renta-ingresos en el bien 1 obtiene 60 unidades de mismo, y si las gasta o invierte en el 2 puede obtener 15 unidades. Con todo esto ¿se puede afirmar que las cantidades demandadas netas son?

Sabemos por el ejercicio anterior que:

$$x_2 = \frac{59}{5} = 11{,}8 \qquad x_1 = 12{,}8$$

son las demandas brutas.

Ahora, sin más que restar:

$$x_1^1 = x_1^0 - 28 = 12{,}80 - 28 = -15{,}20$$
$$x_2^1 = x_2^0 - 8 = 11{,}80 - 8 = 3{,}80$$

Al ser la primera negativa y la segunda positiva, el agente ha entregado 15,20 unidades del bien x_1 a cambio de 3,80 unidades del x_2.

EJERCICIO 2.64.

Dada la función de utilidad $u = x_1x_2$, ¿la elasticidad de demanda renta del bien x_1 es?

Como

$$x_1 = \frac{y}{2p_1}$$

$$E = \frac{dx_1}{dy}\frac{y}{x_1} = \frac{1}{2p_1}\frac{y}{\frac{y}{2p_1}} = 1$$

$$E = 1$$

EJERCICIO 2.65.

Dada la función de utilidad $u = x_1^a x_2^b$, ¿la elasticidad de demanda-precio cruzada del segundo bien es?

Como según sabemos la demanda del bien 2 vendrá dada por la expresión:

$$x_2 = \frac{b}{a+b}\frac{y}{p_2}$$

y como quiera que $\dfrac{dx_2}{dp_1} = 0$, se tendrá necesariamente que $E_{21} = E_{12} = 0$.

EJERCICIO 2.66.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$, ¿la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

EJERCICIO 2.67.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿el precio relativo del bien 2 en términos del 1 es?

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 2.68.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿el precio relativo del bien 1 en términos del 2 es?

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{20}{10} = 2$$

EJERCICIO 2.69.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿la relación marginal de sustitución del bien 2 por el bien 1 en el punto óptimo es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = 2$$

EJERCICIO 2.70.

Dada la función de utilidad de un consumidor $u = x_1x_2$ si $p_1 = 20$, $p_2 = 10$ e $y = 200$, ¿las cantidades demandadas de los dos bienes en el equilibrio son?:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \frac{x_2}{x_1} = 2$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y \qquad 20x_1 + 10x_2 = 200$$

$$20x_1 + 10(2x_1) = 200$$

$$20x_1 + 20x_1 = 40x_1 = 200$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 2x_1 = 10$$

EJERCICIO 2.71.

Dada la función de utilidad $u = x_1^2 x_2$, ¿la función de demanda del bien 1 es?

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Como:

$$u_1 = 2x_1x_2 \qquad u_2 = x_1^2$$

Sustituyendo:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2} = \frac{2x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad x_2 = \frac{p_1x_1}{2p_2}$$

Por otro lado:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

$$p_1x_1 + p_2\frac{p_1x_1}{2p_2} = y$$

$$\frac{3}{2}p_1x_1 = y$$

$$x_1 = \frac{2y}{3p_1}$$

EJERCICIO 2.72.

Dada la función de utilidad $u = x_1x_2$, si la renta es 600 y el precio del bien 1 es 25 y el del 2 es 30, ¿las cantidades demandadas de los bienes en equilibrio son?

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{6} \qquad x_2 = \frac{5}{6}x_1$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y \qquad 25x_1 + 30x_2 = 600$$

$$25x_1 + 30\left(\frac{5}{6}x_1\right) = 600$$

$$x_1 = \frac{600}{50} = 12 \qquad x_2 = \frac{5}{6}12 = 10$$

EJERCICIO 2.73.

Dada la función de utilidad $u = x_1 x_2$, si la renta es 600 y el precio del bien 1 es 25 y el del 2 es 30, el índice de utilidad es:

Como sabemos por el jercicio anterior que:

$$x_1 = \frac{600}{50} = 12 \qquad x_2 = \frac{5}{6} 12 = 10$$

Entonces:

$$u = x_1 x_2 = 12 \cdot 10 = 120$$

EJERCICIO 2.74.*

Conocida la función de utilidad de un consumidor $u = (5x_1^2 + 2x_2^3)^{1/2}$ si los precios de los bienes son $p_1 = 1$ y $p_2 = 3$ y la renta $y = 20$, ¿las cantidades demandadas de equilibrio son?

La condición de primer orden implica hallar:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

por lo que es preciso hallar las utilidades marginales:

$$u_1 = \frac{1}{2} 10x_1(5x_1^2 + 2x_2^3)^{-1/2} = 5x_1(5x_1^2 + 2x_2^3)^{-1/2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} 6x_2^2(5x_1^2 + 2x_2^3)^{-1/2} = 3x_2^2(5x_1^2 + 2x_2^3)^{-1/2}$$

y de ellas los ratios:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{5x_1}{3x_2^2} = \frac{1}{3}$$

$$15x_1 = 3x_2{}^2$$

$$5x_1 = x_2{}^2$$

de donde:

$$x_1 = \frac{x_2^2}{5}$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$20 = x_1 + 3x_2 = \left(\frac{x_2^2}{5}\right) + 3x_2$$

operando:

$$100 = x_2^2 + 15x_2$$

$$x_2 = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} = \frac{-15 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-15 \pm 25}{2} = 5$$

obtenemos las cantidades demandadas de equilibrio:

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 5$$

Pero como quiera que como veremos no se da la condición suficiente de máximo, que implica segunda derivada positiva, estas no serán las cantidades de equilibrio lo que estaba implícito en la forma de la función de utilidad cuya aditividad determina la presencia de bienes sustitutivos.

La condición suficiente de máximo implica:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$$

que en este caso da:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_1}{u_2} = -\frac{5x_1}{3x_2^2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{-5}{3x_2^2} + \frac{30x_1x_2}{9x_2^4}\left(-\frac{5x_1}{3x_2^2}\right) < 0$$

expresión negativa para valores positivos de x_1 y x_2. No cumplen la condición suficiente de máximo debido a la convexidad de las curvas de indiferencia.

Al no darse la condición suficiente de máximo y ser los bienes sustitutivos, el equilibrio se encontrará en los ejes. Con una renta de 20 unidades el consumidor podría adquirir los extremos:

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 0$$

o bien:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{20}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la función de utilidad:

$$u(20, 0) = \sqrt{2.000} = 44{,}72$$

$$u\left(0, \frac{20}{3}\right) = \sqrt{592{,}5} = 24{,}34$$

Luego las cantidades demandadas por el consumidor son:

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 0$$

EJERCICIO 2.75.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = 2x_1 + 4x_2$ y se enfrenta a unos precios $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y posee renta monetaria $y = 100$, entonces las utilidades marginales (u_1, u_2) son:

Las utilidades marginales de la función de utilidad vienen dadas por la expresión:

$$u_1 = \frac{\delta u}{\delta x_1} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{\delta u}{\delta x_2}$$

por lo que en este caso las utilidades marginales son:

$$u_1 = 2 \qquad u_2 = 4$$

EJERCICIO 2.76.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = 2x_1 + 4x_2$ y se enfrenta a unos precios $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y posee renta monetaria $y = 100$, entonces las cantidades de equilibrio son:

La ecuación que permite hallar las condiciones de equilibrio es la conocida ley de las utilidades marginales ponderadas:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

en este caso las utilidades marginales son:

$$u_1 = 2 \qquad u_2 = 4$$

y los precios:

$$p_1 = 3 \qquad p_2 = 2$$

luego:

$$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{2}$$

lo que indica que las pendientes de la recta de balance y de la curvas de indiferencia no coinciden; en efecto la de la recta es $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{3}{2}$; y la de la curva $-\frac{u_1}{u_2} = -\frac{2}{4}$. Este resultado indica que las curvas de indiferencia son rectas y su pendiente distinta a la de la recta de balance. El punto de equilibrio se encontrará en uno de los extremos de la recta de balance. Las posibles combinaciones serán $x_1 = \frac{100}{3}$, $x_2 = 0$. O bien, $x_1 = 0$ y $x_2 = 50$, en efecto:

$$x_1 = 0 \qquad p_2x_2 = y \qquad 2x_2 = 100 \qquad x_2 = 50$$

$$x_2 = 0 \qquad p_1x_1 = y \qquad 3x_1 = 100 \qquad x_1 = 33{,}33$$

$$u(x_1, 0) = 2 \cdot 33{,}33 = 66{,}66$$

$$u(0, x_2) = 4 \cdot 50 = 200$$

El consumidor alcanza la máxima satisfacción en este caso al ser los bienes sustitutivos consumiendo el de precio más bajo:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 50$$

EJERCICIO 2.77.

Conociendo las preferencias de un consumidor mediante $RMS_2^1 = \frac{x_1 + 100}{2x_2 + 100}$. Si los precios de los bienes $p_1 = 8$ y $p_2 = 4$ y la renta $y = 120$, entonces las cantidades de equilibrio son:

Las condiciones de equilibrio son:

$$RMS_2^1 = \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

que con los datos del problema permiten obtener el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x_1 + 100}{2x_2 + 100} = \frac{4}{8} \qquad \text{y} \qquad 8x_1 + 4x_2 = 120$$

de donde

$$x_1 = -\frac{20}{3} \qquad x_2 = \frac{130}{3}$$

El equilibrio se desplaza a la izquierda del primer cuadrante, lo que, gráficamente, significa que las pendientes de las curvas de indiferencia, tomadas en la dirección negativa del eje $0 - x_2$, *son siempre mayores* que la recta de balance en el primer cuadrante.

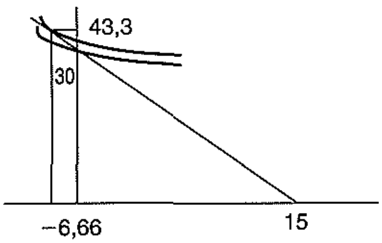

Figura 2.12

Como no pueden consumirse cantidades negativas de los bienes, el equilibrio se encontrará en uno de los dos ejes; en este caso sobre el eje x_2. Las cantidades consumidas serán $x_1 = 0$ y $x_2 = 30$.

EJERCICIO 2.78.

Los gustos de un sujeto se representan por la función $u = \ln(x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{1/2})$. El precio del x_1 expresado en términos del de x_2 es igual 3/5 y si se expresa en términos del de x_3 es igual 1/2. Si la renta de que dispone es tal que invertida toda ella en el bien x_1 permite obtener 65 unidades del mismo, entonces, el equilibrio del consumidor (x_1, x_2, x_3) será:

Del enunciado del problema se desprende que:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{5} \qquad \frac{p_1}{p_3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{y}{p_1} = 65$$

En el equilibrio del consumidor deberá cumplirse que:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{5} \qquad \frac{u_1}{u_3} = \frac{1}{2}$$

Calculamos ahora las utilidades marginales:

$$u_1 = \frac{1}{x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{1/2}} \frac{1}{3} x_1^{-2/3}x_2^{1/4}x_3^{1/2} = \frac{1}{3x_1}$$

$$u_2 = \frac{1}{x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{1/2}} \frac{1}{4} x_1^{1/3}x_2^{-3/4}x_3^{1/2} = \frac{1}{4}x_2$$

$$u_3 = \frac{1}{x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{1/2}} \frac{1}{2} x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{-1/2} = \frac{1}{2}x_3$$

Además:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{4x_2}{3x_1} = \frac{3}{5} \qquad x_2 = \frac{9x_1}{20}$$

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{2x_3}{3x_1} = \frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{3x_1}{4}$$

Por último la ecuación de balance:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = y$$

dividiendo por p_1:

$$x_1 + \frac{p_2}{p_1}x_2 + \frac{p_3}{p_1}x_3 = \frac{y}{p_1}$$

es decir:

$$x_1 + \frac{5}{3}\frac{9x_1}{20} + 2\frac{3x_1}{4} = 65$$

de donde:

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 9 \qquad x_3 = 15$$

EJERCICIO 2.79.

Conocida la función de utilidad del consumidor $u = x_1^2 x_2^2$, los precios de los bienes $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y la renta monetaria igual a 120, entonces las cantidades demandadas y el índice de utilidad son:

Es necesario en primer lugar conocer las cantidades demandadas, antes de la variación en el precio. Aplicando las ya bien conocidas, por la teoría, condiciones de primer orden:

$$\frac{2x_1x_2^2}{2x_2x_1^2} = \frac{3}{2}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 120$$

obtenemos las cantidades:

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 30$$

Estas cantidades dan un índice de satisfacción:

$$u = 20^2 30^2 = 360.000$$

EJERCICIO 2.80.

Conocida la función de utilidad del consumidor $u = x_1^2 x_2^2$, los precios de los bienes $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$ y la renta monetaria igual a 120, cuando el precio del bien 1 desciende en una unidad, los efectos sustitución y renta (utilizando el criterio de Hicks) provocado en la demanda del bien x_1 es:

Es necesario en primer lugar conocer las cantidades demandadas, antes de la variación en el precio. Pero sabemos por el ejercicio anterior que:

$$x_1 = 20 \qquad x_2 = 30$$

Estas cantidades dan un índice de satisfacción:

$$u = 20^2 30^2 = 360.000$$

El efecto de sustitución por su lado recoge la variación de la cantidad demandada, en este caso del bien x_1, debido a la variación del precio, permaneciendo constante el nivel de satisfacción.

La misma curva de indiferencia deberá ser tangente a una nueva recta de balance. Por tanto se resolverá el sistema:

$$360.000 = x_1^2 x_2^2$$

$$\frac{2x_1 x_2^2}{2x_2 x_1^2} = 1$$

$$x_1 = 10\sqrt{6} = 24{,}5$$

que es la nueva demanda del bien x_1.

El efecto sustitución (ES) será la diferencia entre esta cantidad demandada y la cantidad inicial:

$$ES\text{: } 10\sqrt{6} - 20 = 24{,}5 - 20 = 4{,}5$$

El efecto renta (ER) es la diferencia entre el efecto renta y el efecto total provocado en la demanda por la variación del precio y el efecto sustitución. También puede ser hallado haciendo la diferencia entre la cantidad de bien 1 que se demanda cuando el precio varía y se mantiene la misma satisfacción.

La cantidad final demandada del bien 1 se encuentra en el punto en el que la nueva recta de balance se hace tangente a una nueva curva de indiferencia. Deberá resolverse el sistema:

$$\frac{2x_1 x_2^2}{2x_2 x_1^2} = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 120$$

de donde:

$$x_1 = 30$$

El efecto renta será la diferencia entre el efecto total y el efecto sustitución:

$$ER\text{: } 10 - (10\sqrt{6} - 20) = 5{,}50$$

EJERCICIO 2.81.*

Si la función que relaciona la demanda de un bien con la renta del sujeto viene dada por $x = -y^2 + 100y - 900$, ¿el bien es normal en qué intervalo? ¿e inferior?

Recordemos que:

- Un bien es normal cuando:

$$E_y > 0 \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right) > 0$$

- Un bien es inferior cuando:

$$E_y < 0 \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right) < 0$$

- Un bien es de primera necesidad cuando:

$$0 < E_y < 1$$

- Un bien es de lujo cuando:

$$E_y > 1$$

Para dibujar la función, las abscisas se determinan igualando a cero la función dada:

$$-y^2 + 100y - 900 = 0 \qquad y^2 - 100y + 900 = 0$$

$$y = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 3.600}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{6.400}}{2} = \frac{100 \pm 80}{2}$$

con raíces 90 y 10, luego $y_1 = 10$ e $y_2 = 90$.

La función es creciente para $y < 50$; y decreciente para $y > 50$ porque:

$$\frac{dx}{dy} = -2y + 100 = 0$$

$$y = 50$$

Veamos la derivada segunda:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -2$$

Calculamos ahora la elasticidad demanda-renta:

$$E_y = \frac{y}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-y^2 + 100y - 900}(-2y + 100) = \frac{-2y^2 + 100y}{-y^2 + 100y - 900}$$

Esta expresión será positiva cuando ambas expresiones (numerador y denominador) tengan el mismo signo. El numerador es:

- Positivo cuando $-2y^2 + 100y > 0$, es decir $0 < y < 50$.
- Negativo para $y > 50$.

El denominador será:

- Positivo: $(y - 10)(90 - y) > 0$, es decir $10 < y < 90$.
- Negativo: $(y > 90, y < 10)$.

El bien es normal en el intervalo: $10 < y < 50$.

El bien será inferior para $50 < y < 90$.

EJERCICIO 2.82.

Si la función que relaciona la demanda de un bien con la renta del sujeto viene dada por $x = -y^2 + 100y - 900$, ¿ cuándo el bien será de lujo?

Un bien es de lujo cuando:

$$E_y > 1$$

Sabemos por el ejercicio anterior que la elasticidad demanda-renta es:

$$E_y = \frac{y}{x}\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-y^2 + 100y - 900}(-2y + 100) = \frac{-2y^2 + 100y}{-y^2 + 100y - 900}$$

Esta expresión será positiva cuando ambas expresiones (numerador y denominador) tengan el mismo signo. El numerador es:

- Positivo cuando $-2y^2 + 100y > 0$, es decir $0 < y < 50$.
- Negativo para $y > 50$.

El denominador será:

- Positivo: $(y - 10)(90 - y) > 0$, es decir $10 < y < 90$.
- Negativo: $(y > 90, y < 10)$.

El bien será de lujo cuando:

$$\frac{-2y^2 + 100y}{-y^2 + 100y - 900} > 1$$

y como ya hemos visto que la elasticidad era positiva en el intervalo, $10 < y < 50$, dentro de este resultará mayor que la unidad cuando el numerador de la expresión sea mayor que el denominador, es decir:

$$(-2y^2 + 100y) > (-y^2 + 100y - 900)$$

de donde:

$$y^2 < 900 \qquad y < 30$$

El bien será de lujo cuando la elasticidad sea mayor que 1, es decir, $10 < y < 30$.

EJERCICIO 2.83.

Si los gustos de un sujeto se conocen por la relación marginal de sustitución $RMS_2^1 = \dfrac{(x_1 + 5)^2}{2(x_2 + 2x_1)}$ para $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$, ¿la función demanda-renta del bien 1 es?

La función de demanda respecto a la renta se obtiene del sistema formado por la ecuación de las utilidades marginales ponderadas y la ecuación de balance:

$$\frac{(x_1 + 5)^2}{2(x_2 + 2x_1)} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$$
$$2x_1 + x_2 = y$$

de donde:

$$x_1 = y^{1/2} - 5$$

EJERCICIO 2.84.

Si los gustos de un sujeto se conocen por la relación marginal de sustitución $RMS_2^1 = \dfrac{(x_1 + 5)^2}{2(x_2 + 2x_1)}$ para $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$, ¿el bien x_1 es un bien normal?

Sabemos por el ejercicio anterior que la función demanda-renta es:

$$x_1 = y^{1/2} - 5$$

Calculamos la elasticidad demanda-renta:

$$E_{1y} = \frac{y}{x_1}\frac{dx_1}{dy} = \frac{y}{y^{1/2} - 5}\,\frac{1}{2y^{1/2}} = \frac{1}{2 - 10y^{-1/2}}$$

esta es positiva cuando lo es el denominador, es decir, $2 > 10y^{-1/2}$, o bien para $y > 25$, y como para rentas menores no está definida la demanda quiere ello decir que se trata de un bien normal.

EJERCICIO 2.85.

Con los datos el ejercicio anterior cuándo es de primera necesidad el bien 1? ¿y de lujo?

1. Dicho bien es de primera necesidad cuando en valor absoluto E toma valores entre $0 < E < 1$: o bien:

$$2 - 10y^{-1/2} > 1 \Rightarrow y > 100$$

luego el bien es de primera necesidad para $y > 100$.

2. Por la misma razón el bien es de lujo cuando en valor absoluto $E > 1$, es decir, cuando:

$$\frac{1}{2 - 10y^{-1/2}} > 1$$

Lo que implica $y < 100$.

Como para valores de y menores de 25 no existe demanda, resulta que el bien es de lujo en el intervalo $25 < y < 100$.

EJERCICIO 2.86.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$:

1. x_1 y x_2 de equilibrio son:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15$$

$$15x_1 + x_2 = 121$$

de donde se obtiene

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31$$

2. ¿El índice de utilidad es?:

El índice de utilidad para estas cantidades es: $u = 2 \cdot 30 = 60$.

3. Cuando su precio aumenta en una unidad, el efecto sustitución de Hicks en la demanda del bien x_1 es:

Sabemos que en caso:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31 \qquad u = 2 \cdot 30 = 60$$

Como debe hallarse el efecto en la cantidad demandada de x_1 cuando su precio se convierte en $p_1 = 16$, manteniéndose la misma satisfacción, se debe resolver el sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 16$$

$$60 = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{15}}{2} + 4 = 5{,}936$$

El efecto sustitución es la diferencia entre esta cantidad y la de equilibrio inicial:

$$ES\text{:}\ \frac{\sqrt{15}}{2} + 4 - 6 = -0{,}0635$$

valor negativo como corresponde a la variación cuando el precio aumenta y se mantiene la misma satisfacción.

EJERCICIO 2.87.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$, cuando su precio aumenta en una unidad, el efecto renta de Hicks en la demanda del bien x_1 es:

La primera parte del ejercicio la conocemos por el anterior.

Para resolver el efecto renta, debe hallarse el nuevo equilibrio que recoja la variación total de la demanda debida a la variación en el precio. Este equilibrio se obtiene a partir de las ecuaciones:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 16$$

$$16x_1 + x_2 = 121$$

$$x_1 = \frac{23}{4}$$

El efecto renta es la diferencia entre esta cantidad y la correspondiente al equilibrio hallado para el aumento del precio y la misma utilidad, es decir:

$$\frac{23}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2} - 4 = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2} = -0{,}1865$$

También puede hallarse como diferencia entre la variación total de la demanda y la debida al efecto sustitución, es decir:

$$-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2} + 2 = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

EJERCICIO 2.88.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$, cuando el precio del bien 1 disminuye en una unidad, en la nueva combinación de equilibrio hallar x_1 y la renta compensada al modo de Slutsky.

Sabemos que:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31$$

Con el cambio en el precio, la combinación de bienes en donde el consumidor se situará vendrá dada por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14 \qquad 14x_1 + x_2 = 121$$

Con lo que: $x_1 = 6{,}28$.

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación. Los nuevos precios $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$.

EJERCICIO 2.89.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$, cuando el precio del bien x_1 disminuye en una unidad en la nueva combinación de equilibrio el efecto sustitución en la demanda del bien x_1 (en la interpretación de Slutsky) es:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15 \qquad 15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31$$

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación.

Los nuevos precios son $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$.

La combinación de bienes en donde el consumidor se situará nos vendrá dado por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 115$$

Con lo que: $x_1 = 6{,}07$ y el efecto sustitución:

$$ES\text{: } 6{,}07 - 6 = 0{,}07$$

EJERCICIO 2.90.

Si la función de utilidad de un consumidor es $u = (x_1 - 4)(x_2 - 1)$, los precios de los bienes $p_1 = 15$ y $p_2 = 1$ y la renta $y = 121$, cuando el precio del bien x_1 disminuye en una unidad el efecto renta correspondiente, al modo de Slutsky es:

Las condiciones de primer orden son en este caso:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 15$$

$$15x_1 + x_2 = 121$$

y permiten hallar las cantidades de equilibrio al modo habitual:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 31$$

En el efecto sustitución de Slutsky llevamos a cabo una acomodación de la renta tal que a los nuevos precios podamos adquirir la combinación inicial de bienes, lo cual nos permite saber la magnitud de esta acomodación. Los nuevos precios son $p_1 = 14$ y $p_2 = 1$; la renta será $14 \cdot 6 + 31 = 115$.

La combinación de bienes en donde el consumidor se situará nos vendrá dado por la resolución del sistema:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_l + x_2 = 115$$

Con lo que: $x_1 = 6{,}07$ y el efecto sustitución:

$$ES\text{: } 6{,}07 - 6 = 0{,}07$$

El efecto total se obtiene como:

$$\frac{x_2 - 1}{x_1 - 4} = 14$$

$$14x_1 + x_2 = 121$$

De donde:

$$x_1 = 6{,}28$$

$$ET = 6{,}28 - 6 = 0{,}28$$

y el efecto renta por diferencia:

$$ER = ET - ES = 0{,}28 - 0{,}07 = 0{,}21$$

EJERCICIO 2.91.

Dada la función de utilidad $u = \ln(4^{x_1+1})\ln(2^{x_2+1}) + 10$, el valor de la elasticidad de sustitución en el punto $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ es:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{2[\ln(4^{x_1+1})\ln(2^{x_2+1}) + 10]\left[\dfrac{1}{2^{x_2+1}}\ln(4^{x_1+1})2^{x_2+1}\ln 2\right]}{2[\ln(4^{x_1+1})\ln(2^{x_2+1}) + 10]\dfrac{1}{4^{x_1+1}}\ln(2^{x_2+1})4^{x_1+1}\ln 4} =$$

$$= -\frac{\ln(4^{x_1+1})\ln 2}{\ln(2^{x_2+1})\ln 4} = \frac{x_1+1}{x_2+1}$$

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = \left(-\frac{1}{x_2+1}\right)\left(\frac{x_1+1}{x_2+1}\right) + \frac{x_1+1}{(x_1+1)^2} = \frac{2(x_1+1)}{(x_2+1)^2}$$

Valores que sustituidos en la fórmula de la elasticidad de sustitución se convierte en:

$$E^s = \frac{\dfrac{1}{x_1}\left(\dfrac{x_1+1}{x_2+1}\right)^2 + \dfrac{1}{x_2}\left(\dfrac{x_1+1}{x_2+1}\right)}{\dfrac{2(x_1+1)}{(x_2+1)^2}}$$

multiplicando y dividiendo por $(x_2 + 1)$ el segundo término del numerador queda:

$$E^s = 1 + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_1}$$

Para $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Es = 4.

EJERCICIO 2.92.

Un consumidor no típico tiene una conducta altruista (*A*) y tiene una función de utilidad $u = y_{AL}y_{ONG}$, donde y_A es la renta de dicho consumidor e y_{ONG} es la renta de sus beneficiados percibida durante un período determinado. El consumidor dispone de 50 euros y las ONG sólo 2. *A* quiere maximizar su utilidad. ¿Debe o no transferir renta a las ONGS?:

La función de utilidad de *AL* será

$$u = y_{AL}(52 - y_{ONG})$$

dado que la renta de que dispondrán las *ONG* será el total disponible (52) menos lo que finalmente retenga *AL* para sí mismo. La condición de máximo para u será:

$$\frac{\partial u}{\partial y_{AL}} = 0$$

lo que nos da $y_{AL} = 26$.

Con esa renta *AL* hace máxima su utilidad, por lo que deberá transferir a las *ONG*, $50 - 26 = 24$ unidades monetarias. Luego la respuesta es sí por ese valor.

Ecuación de Slutsky

EJERCICIO 2.93.*

Hallar la ecuación de Slutsky normal (no cruzada o no generalizada) correspondiente a una funciónde utlidad $u = \ln x_1 + \ln x_2$ correspondiente al ejercicio anterior.

Se trata de obtener:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} - x_1\frac{\partial x_1}{\partial y}$$

Para lo que será suficiente obtener:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}}$$

Que es igual según la teoría a $\left(-\frac{\lambda p_2^2}{H}\right)$, es decir, el efecto sustitución. El efecto renta, por otro lado es:

$$-x_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right) = \frac{-x_1(u_{12}p_2 - u_{22}p_1)}{H}$$

Hallemos primero u_1 y u_2 para la función de utilidad del enunciado:

$$u_1 = \frac{1}{x_1} \qquad u_2 = \frac{1}{x_2}$$

De donde:

$$u_{11} = \frac{-1}{x_1^2} \qquad u_{22} = \frac{-1}{x_2^2} \qquad u_{12} = u_{21} = 0$$

El multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = \frac{u_1}{p_1} = \frac{\frac{1}{x_1}}{p_1} = \frac{1}{p_1 x_1}$$

Por su parte H es:

$$H = -u_{11}p_2^2 + 2u_{12}p_1p_2 - u_{22}p_1^2$$

Que en este caso, en que $u_{12} = 0$, y dadas las segundas derivadas directas anteriores, se simplifica a:

$$H = \frac{p_2{}^2}{x_1{}^2} + \frac{p_1^2}{x_2^2}$$

Por otro lado:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\bar{u}} = -\frac{\lambda p_2^2}{H} = \frac{\left(\frac{1}{p_1 x_1}\right)p_2^2}{\frac{p_2^2}{x_1^2} + \frac{p_1^2}{x_2^2}}$$

El efecto renta, por otra parte es la expresión siguiente multiplicada por x_1.

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{u_{12}p_2 - u_{22}p_1}{H}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\left(\frac{1}{x_2^2}\right)p_1}{\frac{p_2^2}{x_1^2} + \frac{p_1^2}{x_2^2}} = \frac{\frac{-p_1}{x_2^2}}{x_2^2p_2^2 + x_1^2p_1^2}$$

EJERCICIO 2.94.*

Hallar la ecuación de Slutsky generalizada correspondiente a la función de utilidad $u = \ln x_1 + \ln x_2$.

Necesitamos:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\lambda p_1 p_2}{H} - \frac{x_2(u_{12}p_2 - u_{22}p_1)}{H}$$

Por el ejercicio anterior conocemos $\frac{\partial x_1}{\partial y}$ por lo que la ecuación de Slutsky es:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{\frac{p_2}{x_1}}{\frac{p_2^2}{x_1^2} + \frac{p_1^2}{x_2^2}} - \frac{\frac{p_1}{x_2}}{\frac{p_2^2}{x_1^2} + \frac{p_1^2}{x_2^2}}$$

CAPÍTULO 3

Producción, costes y oferta

Productividades y elasticidad

EJERCICIO 3.1.

Sea una función de producción $x = y_1^2 y_2^2$ y suponga que las cantidades utilizadas de los dos inputs son respectivamente 10 y 20 unidades. Obtenga el volumen de output y la elasticidad del mismo respecto a los inputs o factores de producción.

Debe apreciarse, que tan pronto conozcamos las cantidades utilizadas de input, se obtiene la cantidad de output, perfectamente cardinal y medible en unidades físicas.

1. Sabemos que la función puede reescribirse como:

$$x = 2 \ln (10) + 2 \ln (20) = 10{,}58$$

   También se podría haber obtenido el índice de producción, simplemente, sustituyendo los valores de los dos inputs en la función de producción original.

2. La elasticidad del output respecto a las variaciones en un input viene dada, por el concepto de elasticidad, o por analogía con la elasticidad de la demanda, por la fórmula:

$$N = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{y}{x}$$

y como la derivada es:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = 2y_1y_2^2$$

la elasticidad del output para el primer input será:

$$N_1 = 2\,y_1y_2^2\,\frac{y_1}{x} = \frac{2y_1y_2^2y_1}{y_1^2y_2^2} = 2$$

y análogamente para el y_2.

Nótese que es igual a la productividad marginal multiplicada por la inversa de la productividad media, o lo que es lo mismo, igual al cociente de la productividad marginal y la productividad media. Luego la elasticidad del output respecto al input es positiva, si lo son las productividades medias y marginales. Y mayor o menor que la unidad, según que la marginal sea mayor, menor o igual que la media.

EJERCICIO 3.2.

Sea la función de producción tipo Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^{1-a}$ con $a > 0$. Halle las productividades marginales de los dos inputs, y las elasticidades del output respectivas.

1. Las productividades son las derivadas primeras:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = ay_1^{a-1}y_2^{1-a} = ay_1^a y_1^{-1}y_2^{1-a} = a\,\frac{x}{y_1} > 0$$

análogamente:

$$\frac{\partial x}{\partial y_2} = (1-a)y_2^{1-a-1}y_1^a = (1-a)\,\frac{x}{y_2} > 0$$

ambas positivas, porque lo son sus elementos componentes.

2. Las elasticidades son (por analogía con el concepto general de elasticidad[8]), entonces:

$$N_1 = a\frac{x}{y_1}\frac{y_1}{x} = a > 0$$

[8] Medida cociente entre las variaciones de dos variables, una como independiente y la otra como dependiente de la primera, en lo que se refiere a la medida bajo análisis, en términos porcentuales o no porcentuales.

$$N_2 = (1 - a)\frac{x}{y_2}\frac{y_2}{x} = (1 - a) > 0$$

es decir, los exponentes respectivos.

EJERCICIO 3.3.

Determinar las funciones de productividad total, media y marginal, así como la elasticidad del rendimiento (productividad) para una función de producción $x = 20y_1y_2 + 21y_1 - 2y_2^3$ y la combinación inicial de los inputs o medios de producción, $y_1^0 = 3$, $y_0^2 = 2$.

Como los medios de producción varían en la misma proporción las cantidades empleadas de cada medio se obtienen multiplicando la cantidad inicial por el coeficiente de empleo, es decir:

$$y_1 = 3k \qquad y_2 = 2k$$

La función de rendimiento (productividad) total será:

$$x = 20 \cdot 3k \cdot 2k + 21 \cdot 3k - 2(2k)^3 \quad \text{es decir} \quad x = -16k^3 + 120k^2 + 63k$$

La función de rendimiento medio (productividad media) será:

$$\frac{x}{k} = -16k^2 + 120k + 63$$

La función de rendimiento marginal (productividad marginal del factor o input) será:

$$\frac{dx}{dk} = -48k^2 + 240k + 63$$

Y la elasticidad de rendimiento:

$$E_r \frac{\frac{dx}{dk}}{\frac{x}{k}} = \frac{-48k^2 + 240k + 63}{-16k^2 + 120k + 63}$$

EJERCICIO 3.4.

Para una función de producción Cobb-Douglas, hallar la convexidad de las curvas isocuantas.

La función es:

$$x = Ay_1^a y_2^b \qquad a, b, y_1, y_2 > 0$$

por lo que despejando, se obtiene:

$$y_2 = \left(\frac{x}{A}\right)^{1/b} y_1^{-a/b}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = -\left(\frac{a}{b}\right) y_1^{-(a/b)-1} \left(\frac{x}{A}\right)^{1/b}$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial y_1^2} = \frac{a(a+b)}{b^2} \left(\frac{x}{A}\right)^{1/b} y_1^{-\frac{(a+2b)}{b}} > 0$$

luego tiene la forma usual, de buen comportamiento, para cualquier valor de a y b. Veamos las condiciones de segundo orden:

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

que calculando sus elementos componentes:

$$f_1 = \frac{\delta x}{\delta y_1} = \frac{x}{y_1} \qquad f_2 = \frac{\delta x}{\delta y_2} = \frac{x}{y_2}$$

$$f_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} = a(a-1)\frac{x}{y_1^2}$$

$$f_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} = b(b-1)\frac{x}{y_2^2}$$

permiten obtener:

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = a(a-1)\frac{x}{y_1^2}\, b(b-1)\frac{x}{y_2^2} - \left(\frac{-abx}{y_1 y_2}\right)^2 = (1-a-b)\frac{(abx)^2}{y_1^2 y_2^2}$$

que puede ser positiva, negativa o cero, según los valores de a y b. Si a y b son menores que 1, como es habitual en el caso Cobb-Douglas, las productividades son negativas como se requiere para que la función de producción sea *cóncava*.

Ahora bien:

- Si $a + b = 1$, la expresión anterior será igual a 0 y la función de producción es cóncava pero no estrictamente cóncava.
- Si $a + b < 1$, la expresión será positiva y la función de producción estrictamente cóncava para todos los valores positivos de y_1 e y_2.
- Si $a + b > 1$, la expresión es negativa y la función de producción no es ni cóncava ni convexa.

Si la función de producción es homogénea de grado 1, por ejemplo, una Cobb-Douglas, entonces las productividades marginales son homogéneas de grado cero; es decir, que las productividades marginales dependen exclusivamente de las proporciones en que se utilizan los inputs y no del volumen de output.

Relación marginal de sustitución o transformación técnica

EJERCICIO 3.5.

Dada la función de producción $x = (y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^3$ ¿la relación marginal técnica de sustitución RMS_2^1 en el punto $y_1 = 4$, $y_2 = 5$ es?

La *RMS* técnica o *RMST* del input y_1 por y_2 el es decir, en notación RMS_2^1 se obtiene hallando la expresión:

$$RMS_2^1 = -\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_2}{f_1}$$

$$RMS_2^1 = \frac{3(y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^2}{2(y_1 - 2)(y_2 - 1)^3} = \frac{3(y_1 - 2)}{2(y_2 - 1)}$$

En el punto $(y_1 = 4, y_2 = 5)$ es:

$$RMS_2^1\,(4, 5) = \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 3.6.

¿Qué tipo de rendimientos a escala presentan las siguientes funciones de producción?: (1) $x = y_1^2 y_2^2$, (2) $x = y_1^{1/2} y_2^{1/3}$, (3) $x = Ay_1^a y_2^b$, (4) $x = 10 + 10L + 5L^2$ (L denota el input trabajo). Demuéstrelo.

1. Multiplicando los dos inputs de la primera, por ejemplo, 2:

$$x = (2y_1)^2(2y_2)^2 = 2^2 y_1^2 2^2 y_2^2 = 2^2(y_1^2 y_2^2)$$

   luego presenta rendimientos crecientes a escala, ya que si se doblan los inputs se cuadruplica el output.

2. Análogamente para la segunda:

$$x = (2y_1)^{1/2}(2y_2)^{1/3} = 2^{1/2} y_1^{1/2} 2^{1/3} y_2^{1/3} = 2^{1/2} 2^{1/3}(y_1^{1/2} y_2^{1/3})$$

   la suma de los exponentes de 2 es $\frac{5}{6}$, menor que uno, y menor que dos, la escala en que hemos aumentado todos los inputs; luego se dan rendimientos decrecientes a escala.

3. Por el mismo procedimiento:

$$x = A(2y_1)^a\,(2y_2)^b = A\,2^a y_1^a 2^b y_2^b = A\,2^a 2^b y_1^a y_2^b = A2^{a+b} y_1^a y_2^b$$

   Los rendimientos dependen de si $a + b$ *es mayor, menor o igual a* 1.

   – Si $a + b = 1$ entonces $2^{a+b} = 2^1 = 2$ rendimientos constantes.

   – Si $a + b > 1$ entonces $2^{a+b} = 2^{[>1]} = [\text{e.j}, 2] = 4$ rendimientos crecientes.

   – Si $a + b < 1 \left(\text{e.j}, \frac{1}{2}\right)$ entonces $2^{a+b} = 2^{1/2} = \sqrt{2} < 2$ rendimientos decrecientes.

4. Del mismo modo ($L = 1$):

$$x = 10 + 10(2L) + 5(2L)^2 = 10 + 10 \cdot 2L + 5 \cdot 2^2 L^2$$

   el segundo término del segundo miembro se dobla, siendo constante el primero, pero el tercero más que se dobla. Por tanto se dan rendimientos crecientes a escala.

EJERCICIO 3.7.

Dada la función de producción $x = y_1^{0,5}y_2^{0,5}$ establezca los rendimientos a escala, la presencia o ausencia de rendimientos decrecientes, comparándolos, en su caso.

Multiplicando por un factor constante, digamos λ, los dos inputs:

$$(\lambda y_1)^{0,5}(\lambda y_2)^{0,5} = \lambda^{0,5}y_1^{0,5}\lambda^{0,5}y_2^{0,5} = \lambda x$$

luego presenta rendimientos constantes a escala. Por otro lado, derivando en la función de producción respecto de –por ejemplo– y_1:

$$\frac{dx}{dy_1} = 0,5y_1^{-0,5}y_2^{0,5}$$

productividad marginal positiva; y volviendo a derivar:

$$\frac{d^2x}{d^2y_1} = -0,25y_1^{-1,5}y_2^{0,5}$$

No debe confundirse –por tanto– los rendimientos a escala que implican variaciones en todos los factores, y los rendimientos decrecientes (ley de) que implican a su vez, que sólo uno de ellos varía; en este caso el y_1.

Función CES (elasticidad de sustitución constante)

EJERCICIO 3.8.

Dada una función de producción *CES* (elasticidad de sustitución constante) $x = A[by_1^{-a} + (1 - b)y_2^{-a}]^{-1/a}$ con, $A > 0$, $0 < b < 1$, y, $a = 1$. Hallar: el grado de homogeneidad, las productividades marginales y la relación marginal de sustitución.

El significado de los parámetros es:

- A parámetro de eficiencia; es un indicador del estado de la tecnología.
- b el parámetro de distribución indica las participaciones relativas de los factores en el producto.
- a el parámetro de sustitución determina el valor de la elasticidad de sustitución.

1. Es homogénea de grado 1[9]:

$$A[b(\lambda y_1)^{-a} + (1-b)(\lambda y_2)^{-a}]^{-1/a} = A\lambda^{-1/a}[by_1^{-a} + (1-b)y_2^{-a}]^{-1/a} = (\lambda^{-1/a})^{-1/a}x = \lambda x$$

ya como todas las funciones linealmente homogéneas, presenta rendimientos constantes a escala, y sus *productividades medias y marginales* son homogéneas de grado *cero*.

2. *Productividades marginales.* Indicada ahora por el termino entre corchetes [.] la función original:

$$\frac{\partial x}{\partial y_2} = A\left(-\frac{1}{a}\right)[\cdot]^{-(1/a)-1}(1-b)(-a)y_2^{-a-1} = (1-b)\frac{A^{1+a}}{A^a}[\cdot]^{-(1+a)/a}y_2^{-(1+a)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y_2} = \frac{1-b}{A^a}\left(\frac{x}{y_2}\right)^{a+1} > 0$$

y análogamente para el uno:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{b}{A^a}\left(\frac{x}{y_1}\right)^{a+1} > 0$$

3. Relación marginal de sustitución:

$$RMS_1^2 = -\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{\dfrac{\partial x}{dy_1}}{\dfrac{\partial x}{\partial y_2}} = -\frac{b}{1-b}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{a+1} < 0$$

la isocuanta es decreciente y estrictamente convexa para vlores positivos de y_1 e y_2.

$$\frac{d^2y_2}{dy_1^2} > 0$$

[9] Puede adaptarse fácilmente, para recoger rendimientos distintos de los constantes, a partir de un nuevo parámetro (por ejemplo, v) que multiplique al exponente $-\frac{1}{a}$.

EJERCICIO 3.9.

Dada la función de producción $x = -y_1^3 - 2y_2^2 + 10y_1y_2 + 45y_1 + 2y_2$, hallar la ecuación de las líneas que limitan la zona de sustitución y el máximo absoluto de producción.

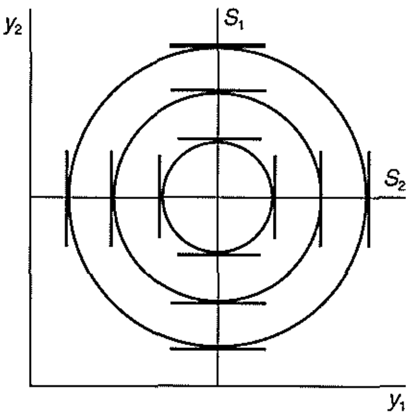

Figura 3.1

La curva S_1 cumple la condición de que:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{f_1}{f_2} = 0$$

para que esta expresión sea nula, ha de anularse el númerador ($f_1 = 0$):

$$f_1 = \frac{dx}{dy_1} = -3y_1^2 + 10y_2 + 45 = 0$$

que es la línea de sustitución S_1. Para la línea S_2 se cumple que:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \infty \qquad \frac{dy_1}{dy_2} = 0$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{f_2}{f_1} = 0 \Rightarrow f_2 = 0$$

$$\frac{dx}{dy_2} = -4y_2 + 10y_1 + 2 = 0$$

línea de sustitución de S_2.

En el máximo absoluto de la producción se cortan ambas líneas de sustitución:

$$-3y_1^2 + 10y_2 + 45 = 0$$

$$-4y_2 + 10y_1 + 2 = 0$$

despejando y_2 en la segunda, queda:

$$y_2 = \frac{10y_1 + 2}{4} = \frac{5y_1 + 1}{2}$$

sustituyendo en la primera se llega a:

$$-3y_1^2 + 10\,\frac{5y_1 + 1}{2} + 45 = 0$$

o bien:

$$3y_1^2 - 25y_1 - 50 = 0 \qquad y_1 = 10$$

ya que la raíz negativa no es significativa:

$$y_2 = \frac{5y_1 + 1}{2} = \frac{51}{2} = 25{,}5$$

Sustituyendo estos valores en la función de producción, se obtiene el valor de x que corresponde al máximo absoluto:

$$x = -1.000 - 1.300{,}5 + 2.550 + 450 + 51 = 700{,}5$$

EJERCICIO 3.10.

Hallar la ecuación de la línea de máximos técnicos para la función de producción: $x = 3y_1 + 18y_2 + \left(\frac{1}{2}\right)y_1y_2 - y_1^2 - y_2^2$.

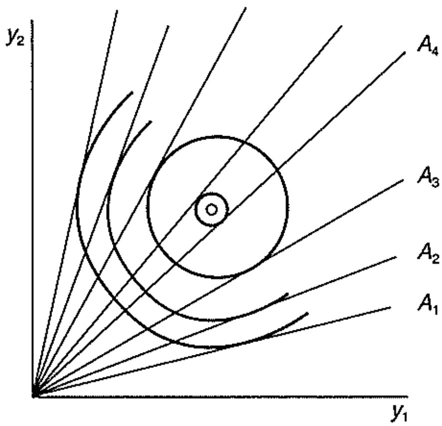

Figura 3.2

La línea de los máximos técnicos representa los puntos de tangencia entre las isocuantas y las líneas $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, ... La tangente de la isocuanta se expresa como:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{f_1}{f_2}$$

que se concreta para la función dada en la ecuación:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{3 + \left(\frac{1}{2}\right)y_2 - 2y_1}{18 + \left(\frac{1}{2}\right)y_1 - 2y_2}$$

y la tangente de las rectas $0A_1$, $0A_2$, $0A_3$, $0A_4$, ... es $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$. La igualdad de ambos conduce a la ecuación de la línea de máximos técnicos:

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{3 + \left(\frac{y_2}{2}\right) - 2y_1}{18 + \left(\frac{y_1}{2}\right) - 2y_2}$$

o bien:

$$3y_1 + 18y_2 + y_1y_2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 = 0$$

EJERCICIO 3.11.

Dada la función de produción $x = 3y_1 + 18y_2 + \left(\frac{y_1y_2}{2}\right) - y_1^2 - y_2^2$ hallar la ecuación de la línea de óptimos técnicos.

Sustituyendo y_1 e y_2 por los valores $y_1 = ky_1^0$, $y_2 = ky_2^0$:

$$x = 3ky_1^0 + 18ky_2^0 + \frac{k^2y_1^0y_2^0}{2} - k^2(y_1^0)^2 - k^2(y_2^0)^2$$

la propiedad que cumple la línea de óptimos técnicos es que la elasticidad de rendimiento es la unidad:

$$PM = \frac{x}{k} = 3y_1^0 + 18y_2^0 + \frac{ky_1^0y_2^0}{2} - k(y_1^0)^2 - k(y_2^0)^2$$

$$P_m = \frac{\partial x}{\partial k} = 3y_1^0 + 18y_2^0 + ky_1^0y_2^0 - 2k(y_1^0)^2 - 2k(y_2^0)$$

$$E_r = \frac{P_m}{PM} = \frac{3y_1^0 + 18y_2^0 + ky_1^0y_2^0 - 2k(y_1^0)^2 - 2k(y_2^0)^2}{3y_1^0 + 18y_2^0 + \frac{ky_1^0y_2^0}{2} - k(y_1^0)^2 - k(y_2^0)^2}$$

Realizando operaciones, tenemos:

$$\frac{1}{2}ky_1^0y_2^0 - (y_1^0)^2k - k(y_2^0)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}y_1^0y_2^0 - (y_1^0)^2 - (y_2^0)^2 = 0$$

Sustituyendo $y_1^0 = \left(\frac{y_1}{k}\right)$, $y_2^0 = \left(\frac{y_2}{k}\right)$ tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{y_1y_2}{k^2} - \frac{y_1^2}{k^2} - \frac{y_2^2}{k^2} = 0 \qquad\qquad \frac{y_1y_2}{2} - y_1^2 - y_2^2 = 0$$

ecuación que cumple la línea de los óptimos técnicos.

Sustitución: productividades marginales ponderadas

EJERCICIO 3.12.

Si dada la función de producción de una empresa, la productividad marginal del factor 1 es 20, la del 2, 6, y el precio de los factores es, 5, y 3, respectivamente: 1) ¿está la empresa en equilibrio? ¿por qué?; 2) ¿debe aumentar o disminuir la cantidad utilizada de alguno de los dos factores?

La primera pregunta no puede responderse, ya que desconocemos el precio del bien producido. Respecto a la segunda, como debe cumplirse la ley de las productividades marginales ponderadas por los precios:

$$\frac{Pm(y_1)}{q_1} = \frac{Pm(y_2)}{q_2}$$

que en este caso es:

$$4 = \frac{20}{5} > \frac{6}{3} = 2$$

Luego debe aumentarse la cantidad del factor 1.

Senda de expansión

EJERCICIO 3.13.

Hállese la senda de expansión correspondiente a una función de producción Cobb-Douglas $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$ e interprétela.

La ecuación de la senda de expansión viene dada por las condiciones de primer orden:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

como la función es: $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$

y sabemos que es homogénea de grado 1, las productividades marginales son:

$$f_1 = aAy_1^{a-1}y_2^{1-a}$$
$$f_2 = (1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})$$

multiplicando la primera por λ, por ejemplo:

$$a[A(\lambda y_1)^{a-1}(\lambda y_2)^{1-a}] =$$
$$= a[A\lambda^{a-1}y_1^{a-1}\lambda^{1-a}y_2^{1-a} = \lambda^0 aAy_1^{a-1}y_2^{1-a}$$
$$= \lambda^0(aAy_1^a y_2^{1-a}y_1^{-1}) = \lambda^0 Pm_1 = Pm_1$$

ya que: $\lambda^{a-1+1-a} = \lambda^0$, $\lambda^0 = 1$.

donde Pm_1 es la productividad marginal. Por otro lado:

$$\lambda f_2 = (1-a)[A(\lambda y_1)^a(\lambda y_2)^{-a} = \lambda^0(1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})$$

Luego las *productividades marginales* son homogéneas de grado cero. La ecuación de la senda de expansión es, por tanto:

$$\frac{aAy_1^{a-1}y_2^{1-a}}{(1-a)(Ay_1^a y_2^{-a})} = \frac{ay_2}{(1-a)y_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

por lo que:

$$(1-a)q_1y_1 = aq_2y_2$$

o en forma implícita:

$$(1-a)q_1y_1 - aq_2y_2 = 0$$

obviamente una función lineal.

Función Cobb-Douglas: minimización de costes y maximización del beneficio

EJERCICIO 3.14.

Obtenga las cantidades de inputs que minimizan los costes de producción, dada una tecnología Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^b$.

Para una tecnología Cobb-Douglas se trata de:

$$\text{minimizar} \quad q_1y_1 + q_2y_2$$
$$\text{s.a} \quad x = y_1^a y_2^b$$

las condiciones de primer orden son:

$$q_1 = \lambda a y_1^{a-1} y_2^b$$
$$q_2 = \lambda b y_2^{b-1} y_2^a$$
$$x = y_1^a y_2^b$$

Multiplicando la primera ecuación por y_1 y la segunda por y_2:

$$q_1y_1 = \lambda a y_1^a y_2^b = \lambda a x$$
$$q_2y_2 = \lambda b y_1^a y_2^b = \lambda b x$$

de donde:

$$y_1 = \frac{\lambda a x}{q_1}$$
$$y_2 = \frac{\lambda b x}{q_2}$$

que son las demandas de factores para precios y cantidad de producto dados. Sustituyendo en la función de producción:

$$x = y_1^a y_2^b = \left(\frac{\lambda a x}{q_1}\right)^a \left(\frac{\lambda b x}{q_2}\right)^b$$

resolviendo para λ:

$$y_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{b/a+b} q_1^{b/a+b} q_2^{1/a+b} x^{1/a+b}$$

Para y_2 análogamente. Nótese que son funciones de los precios de los factores y de la cantidad de output además de los parámetros a y b. No deben confundirse con las funciones de demanda de maximización del beneficio (ver más abajo) que dependen de tan sólo los precios de los inputs y del output. Reconstruyendo la función de costes:

$$C = q_1y_1 + q_2y_2 = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{b/a+b} + \left(\frac{a}{b}\right)^{a/a+b}\right] q_1^{b/a+b} q_2^{b/a+b} x^{1/a+b}$$

que depende de la cantidad de producto y de los precios de los factores.

EJERCICIO 3.15.

Maximice el beneficio de una empresa que disponga una tecnología Cobb-Douglas $x = y_1^a y_2^b$.

Podemos plantear el problema como:

$$\text{máx } B = pz - py$$

siendo q e y vectores y $x = y_1^a y_2^b$, la función de producción, por lo que se trata de maximizar:

$$B = p(y_1^a y_2^b) - q_1 y_1 - q_2 y_2$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$pay_1^{a-1} y_2^b - q_1 = 0$$
$$py_1^a y_2^{b-1} - q_2 = 0$$

que, multiplicando la primera por y_1 y la segunda por y_2:

$$pay_1^a y_2^b = q_1 y_1$$
$$pby_2^b y_1^a = q_2 y_2$$

permiten obtener:

$$pax = q_1 y_1$$
$$pbx = q_2 x_2$$

que son dos ecuaciones con dos incógnitas, de donde se pueden despejar las cantidades (óptimas de maximización del beneficio), como funciones de los precios (paramétricos) de los inputs, y de las cantidades (óptimas) del output:

$$y_1 = \frac{apx}{q_1} \qquad y_2 = \frac{bpx}{q_2}$$

Si sustituimos ahora las dos últimas expresiones en la función de producción, obtenemos la función de oferta del output:

$$x = y_1^a y_2^b = \left(\frac{apx}{q_1}\right)^a \left(\frac{bpx}{q_2}\right)^b$$

y obteniendo factor común x:

$$x = x^{a+b}\left(\frac{ap}{q_1}\right)^a\left(\frac{bp}{q_2}\right)^b$$

que se puede reescribir, elevando los tres elementos del segundo miembro a $\left(\frac{1}{1-a-b}\right)$:

$$x = x^{\frac{a+b}{1-a-b}}\left(\frac{pa}{q_1}\right)^{a/1-a-b}\left(\frac{pb}{q_2}\right)^{b/1-a-b}$$

con lo que podemos relacionar la función de oferta con los rendimientos a escala. Aquí obtenemos el resultado de indeterminación de la oferta, en presencia de rendimientos constantes a escala, y a largo plazo. En efecto cuando los exponentes se anulan, y si los precios p y q dan beneficios cero, la empresa es indiferente respecto a la escala de operaciones o nivel de output.

Factores complementarios y sustitutivos

EJERCICIO 3.16.

Estúdiese el carácter complementario o sustitutivo de los medios de producción y_1 e y_2, en la función de producción:

$$\left(\frac{125x - 1.250}{y_2 + 3}\right)^3 - (5y_1 + 4) = 0$$

El paso de un punto a otro de equilibrio exige desde el punto de vista teórico que las condiciones de maximización del beneficio no varíen:

$$pf_1 - q_1 = 0$$

$$pf_2 - q_2 = 0$$

$$pf_{11}dy_1 + pf_{12}dy_2 + f_1dp + dq_1 = 0$$

$$pf_{21}dy_1 + pf_{22}dy_2 + f_2dp - dq_2 = 0$$

$$f_{11}dy_1 + pf_{12}dy_2 = \frac{dp_1 - f_1dq}{p}$$

$$f_{21}dy_1 + pf_{22}dy_2 = \frac{dp_2 - f_2 dq}{p}$$

$$dy_1 = \frac{1}{(f_{11}f_{22} = f_{12}^2)}\left[f_{22}\frac{dp_1 - f_1 dp}{p} - f_{12}\frac{dp_2 - f_1 dp}{p}\right]$$

$$dy_2 = \frac{1}{(f_{11}f_{22} = f_{12}^2)}\left[f_{22}\frac{dp_2 - f_2 dp}{p} - f_{12}\frac{dp_1 - f_1 dp}{p}\right]$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \frac{-f_{12}}{p(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \qquad \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = \frac{-f_{21}}{p(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}$$

El denominador es siempre positivo ya que es la condición de máximo beneficio.

- Dos inputs son sustitutivos cuando $S_{12} > 0 \Rightarrow f_{12} > 0$.
- Dos inputs son complementarios cuando $S_{12} < 0 \Rightarrow f_{12} < 0$.

Aplicando estas condiciones ahora a la funcióndе producción del enunciado que se puede reescribir como:

$$x = \frac{(5y_1 + 4)^{1/3}(y_2 + 3)^{1/2}}{125} + 10$$

$$f_1 = \frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{\frac{1}{3}(5y_1 + 4)^{-2/3}5(y_2 + 3)^{1/2}}{125}$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\frac{1}{3}(5y_1 + 4)^{-2/3}5\left(\frac{1}{2}\right)(y_2 + 3)^{1/2}}{125} =$$

$$= \frac{1}{150(5y_1 + 4)^{2/3}(y_2 + 3)^{1/2}}$$

que es positiva para valores positivos de los medios de produción, luego los medios son complementarios.

EJERCICIO 3.17.

Dada la función de producción $x = y_1^{1/2} y_2^{1/2}$ si los precios de los factores de producción son respectivamente $q_1 = 1$ y $q_2 = 3$, ¿la función de costes es?

Obteniendo primero la relación marginal de sustitución técnica e igualándola al cociente invertido de los precios de los dos factores de producción al modo habitual:

$$RMST_{y1}^{y2} = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial x}{\partial y_2}} = \frac{q_1}{q_2}$$

Cuyas productividades marginales parciales son:

$$\frac{\partial x}{\partial y_1} = \left(\frac{1}{2}\right) y_1^{-(1/2)} y_2^{1/2} \qquad \frac{\partial x}{\partial y_2} = \left(\frac{1}{2}\right) y_2^{-(1/2)} y_1^{1/2}$$

por lo que se cumple que:

$$\frac{1}{3} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) y_1^{-(1/2)} y_2^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}\right) y_2^{-(1/2)} y_1^{1/2}} \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{3};\ y_1 = 3y_2$$

de donde, sustituyendo:

$$C = y_1 q_1 + y_2 q_2 = 3y_2 q_1 + y_2 q_2 = 3y_2 + 3y_2 = 6y_2$$

Y operando:

$$x = (3y_2)^{1/2} (y_2)^{1/2} = y_2 \sqrt{3}$$

por lo que

$$C(x) = 6 \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Costes a largo plazo

EJERCICIO 3.18.

Dada la función de producción $x = Ay_1^a y_2^{1-a}$ en la que, como es habitual, A y a son constantes y a se encuentra entre 0 y 1, obtener la curva de costes a largo plazo, en el caso de que la empresa adquiera los factores en régimen de competencia perfecta.

La relación marginal de sustitución es, e implica que:

$$RMS_1^2 = \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

que aplicada a los datos del enunciado significa:

$$RMS_1^2 = \frac{Aay_1^{a-1}y_2^{1-a}}{A(1-a)y_1^a y_2^{-a}} = \frac{ay_2}{(1-a)y_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

de donde:

$$y_2 = y_1 \frac{(1-a)}{a} \frac{q_1}{q_2}$$

por lo que sustituyendo ahora en la función de producción:

$$x = Ay_1^a y_2^{1-a} = Ay_1^a y_1^{1-a}\left(\frac{(1-a)}{a}\frac{q_1}{q_2}\right)^{1-a} = Ay_1\left(\frac{(1-a)}{a}\frac{q_1}{q_2}\right)^{1-a}$$

y de aquí:

$$y_1 = \frac{x}{A}\left(\frac{q_2}{q_1}\frac{a}{(1-a)}\right)^{1-a}$$

los costes totales a largo son:

$$CTL = q_1y_1 + q_2y_2 = q_1y_1 + q_2y_2\left(\frac{q_1}{q_2}\frac{(1-a)}{a}\right)$$

por lo que sustituyendo ahora la expresión para y_1 y sacando factor común:

$$CTL = y_1\left[q_1 + q_2\left(\frac{q_1}{q_2}\frac{(1-a)}{a}\right)\right]$$

Multiplicando y dividiendo el primer término por a quedará:

$$CTL = y_1\left[\frac{aq_1}{a} + \left(\frac{q_2q_1}{q_2}\frac{-q_1q_2a}{a}\right)\right] \qquad CTL = y_1\left[\frac{aq_1}{a} + \left(\frac{q_1 - q_1a}{a}\right)\right]$$

$$CTL = y_1\left[\frac{q_1}{a}\right] \qquad CTL = \frac{q_1}{a}\frac{x}{A}\left(\frac{q_2}{q_1}\frac{a}{(1-a)}\right)^{1-a}$$

Costes marginales a largo

EJERCICIO 3.19.

Con los datos y resultados del problema ejercicio anterior establezca si los costes marginales y medios a largo son iguales, para $a = 0{,}5$, y $A = 1$.

Para estos datos:

$$CTL = \frac{q_1}{\frac{1}{2}}\frac{x}{1}\left(\frac{q_2}{q_1}\frac{a}{(1-a)}\right)^{1/2} = 2xq_2^{1/2}q_1^{1/2}$$

$$CML = \frac{CTL}{x} = 2q_2^{1/2}q_1^{1/2}$$

$$CmL = 2q_2^{1/2}q_1^{1/2}$$

EJERCICIO 3.20.

Discuta, demostrándola, la siguiente proposición: para la función Cobb-Douglas $x = y_1^{0,4}y_2^{0,6}$ y precios paramétricos, las funciones de costes medios y marginales a largo plazo son iguales.

La proposición no sólo es válida para esta función concreta, sino para cualquiera de la forma Cobb-Douglas. En efecto, para cumplir las condiciones de eficiencia, es decir, minimizar los costes, por ejemplo, se debe cumplir la ley de la igualdad de las productividades marginales ponderadas:

$$\frac{Pm(y_1)}{q_1} = \frac{Pm(y_2)}{q_2}$$

que en ese caso adopta la forma:

$$\frac{Pm(y_1)}{Pm(y_2)} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{0{,}4y_1^{0{,}4-1}y_2^{0{,}6}}{0{,}6y_1^{0{,}4}y_2^{0{,}6-1}} = \frac{0{,}4y_2}{0{,}6y_1} = \frac{q_1}{q_2}$$

por lo que sustituyendo en x:

$$x = y_1^{0{,}4}\left(\frac{3}{2}\frac{q_1}{q_2}y_1\right)^{0{,}6}$$

de donde:

$$y_1 = x\left(\frac{2}{3}\frac{q_2}{q_1}\right)^{0{,}6}$$

y sustituyendo ahora en la función de costes:

$$CTL = q_1y_1 + q_2y_2 = q_1y_1 + q_2\frac{3}{2}\frac{q_1}{q_2}y_1 = 1{,}5q_1y_1$$

$$CTL = 1{,}5q_1x\left(\frac{2}{3}\frac{q_2}{q_1}\right)^{0{,}6}$$

Calculando ahora los costes medios y marginales:

$$\frac{CTL}{x} = 1{,}5q_1\left(\frac{2}{3}\frac{q_2}{q_1}\right)^{0{,}6}$$

$$CmL = \frac{CTL}{x} = 1{,}5q_1\left(\frac{2}{3}\frac{q_2}{q_1}\right)^{0{,}6}$$

Quedando demostrada la proposición.

Teorema de Le Chatelier-Samuelson

EJERCICIO 3.21.

Dada la función de producción de la familia Cobb-Douglas $x = y_1 y_2$ establezca si se cumple para ella el teorema de Le Chatelier-Samuelson.

El teorema afirma que la función de oferta del producto será más elástica, a medida que se consideren variables un mayor número de factores de producción.

1. *Método I.* Podemos reescribir la función de producción como:

$$x = \ln y_1 + \ln y_2 = \sum \ln y_i$$

y análogamente para cualquier número de factores, y si maximizamos el beneficio:

$$B = px - q_1 y_1 - q_2 y_2$$
$$B = px = p(\sum \ln y_i) - q_1 y_1 - q_2 y_2$$

de donde, por las condiciones de primer orden y ejercicios anteriores, sabemos que:

$$y_i = \frac{p}{q_i} \qquad i = 1,2$$

en este caso. Y sabemos que las funciones de oferta del producto se obtienen por sustitución de las anteriores en la función de producción:

$$x = \sum_{i=1}^{2} \ln y_i = \sum_{i=1}^{2} \ln \left(\frac{p}{q_i}\right) = \sum_{i=1}^{2} (\ln p - \ln q_i) = 2 \ln p - \sum_{i=1}^{2} \ln q_i$$

por lo que calculando ahora las elasticidades:

$$E_{xp} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{p}$$

luego:

$$E_{xp} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{x}{p} = \frac{p}{x}\frac{2}{p} = \frac{2}{x}$$

o en el caso general:

$$E_{xp} = \frac{n}{x}$$

que será tanto mayor cuanto mayor sea n.

2. *Método II.* Sin más que sustituir las condiciones de primer orden en la función de producción:

$$x = \frac{q_2}{p}\frac{q_1}{p}$$

o en el caso general de n factores:

$$x = \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p^n}$$

De donde la elasticidad, ignorando los bien conocidos signos:

$$E = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = \frac{np^{n-1}q_1 q_2 \cdots q_n}{p^{2n}} \frac{p}{\dfrac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_n}}$$

Por lo que si $n = 2$, $E = 2$; si $n = 3$, $E = 3$, etc. Con lo que queda demostrado el teorema.

Homogeneidad y escala

EJERCICIO 3.22.

Dada la función de producción $x = 2y_1^{0,6}y_2^{0,2}$ indicar si es homogénea, de que grado y que tipo de rendimientos a escala presenta.

Un grado de homogeneidad menor que la unidad (aquí 0,8) supone rendimientos decrecientes a escala.

EJERCICIO 3.23.

Dada la función de producción $x = 5y_1 + y_1 y_2 - 3y_2^2$ y empleándose 24 unidades de y_1, el valor de y_2 que hace máxima la cantidad de producto es:

Para hallar la función de productividad total del input x sustituimos en la ecuación anterior el valor de x_1, en este caso 24:

$$x = 120 + 24y_2 - 3y_2^2$$

La condición de máximo exige que:

$$(1)\ \frac{dx}{dy_2} = 24 - 6y_2 = 0 \qquad y_2 = 4$$

$$(2)\ \frac{d^2x}{dy_2^2} = -6 < 0$$

luego el máximo está en $y_2 = 4$.

EJERCICIO 3.24.

Dada la función de producción $x = 5y_1 + y_1 y_2 - 3y_2^2$ si se emplean 24 unidades de y_1, la cantidad de producto será.

Para hallar la función de productividad total del input y_2 sustituimos en la ecuación anterior el valor de y_1, en este caso 24:

$$x = 120 + 24y_2 - 3y_2^2$$

La condición de máximo exige que:

$$(1)\ \frac{dx}{dy_2} = 24 - 6y_2 = 0 \qquad y_2 = 4$$

$$(2)\ \frac{d^2x}{dy_2^2} = -6 < 0$$

luego el máximo está en:

$$y_2 = 4$$

La cantidad de producto será:

$$x = 120 + 24 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2 = 168$$

Repaso de varios conceptos

EJERCICIO 3.25.

Si la función de producción es $x = y_1^2(8y_2 + 4) - 4y_1^3$ el valor de y_1 para que la productividad marginal sea máxima, cuando el input y_2 es constante e igual a 7 unidades, es.

La función de productividad total al sustituir

$$y_2 = 7 \quad \text{es} \quad x = 60y_1^2 - 4y_1^3$$

y la de productividad marginal:

$$\frac{dx}{dy_1} = 120y_1 - 12y_1^2 = 0$$

Para que ésta sea máxima se requiere:

$$(1)\ \frac{d^2x}{dy_1^2} = 120 - 24y_1 = 0$$

$$(2)\ \frac{d^3x}{dy_1^3} = -24 < 0$$

máxima para $y_1 = 5$.

EJERCICIO 3.26.

Con los datos del problema anterior ¿la cantidad de producto máxima cuando el input y_2 es constante e igual a 7 unidades, será?

La función de productividad total al sustituir $y_2 = 7$ es $x = 60y_1^2 - 4y_1^3$ y la de productividad marginal $\dfrac{dx}{dy_1} = 120y_1 - 12y_1^2$.

Cuando ésta es 0 la total es máxima.

$$120y_1 - 12y_1^2 = 0$$
$$y_1 = 10$$
$$x = 60 \cdot 10^2 - 40 \cdot 10^2 = 2.000$$

EJERCICIO 3.27.

Dada la función de producción $x = 10y_1^2y_2 + 6y_1^2 - 3y_1^3$, ¿el valor máximo de la productividad media para $y_2 = 12$ es?

La función de productividad total de y_1 para $y_2 = 12$ será: $x = 126y_1^2 - 3y_1^3$.

Y la función de productividad media será: $\dfrac{x}{y_1} = \dfrac{126y_1^2 - 3y_1^3}{y_1} = 126y_1 - 3y_1^2$.

Para que dicha productividad media sea máxima es condición necesaria que:

$$(1)\quad \frac{d\left(\dfrac{x}{y_1}\right)}{dy_1} = 126 - 6y_1 = 0;\; y_1 = 21$$

$$(2)\quad \frac{d^2\left(\dfrac{x}{y_1}\right)}{dy_1^2} = -6 < 0$$

El valor máximo de la productividad media es:

$$\frac{x}{y_1} = 126 \cdot 21 - 3 \cdot 21^2 = 1.323$$

EJERCICIO 3.28.

Dada la función de producción $x = (y_1 - 2)^2(y_2 - 1)^3$ y la relación marginal técnica de sustitución RMS_1^2 en el punto (6, 3) es:

La *RMS* ténica o *RMST* del input y_2 por y_1, es decir, en notación RMS_1^2 se obtiene hallando la expresión:

$$RMS_1^2 = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$RMS_1^2 = \frac{2(y_1 - 2)(y_2 - 1)^3}{3(y_1 - 2)^3(y_2 - 1)^2} = \frac{2(y_2 - 1)}{3(y_1 - 2)}$$

En el punto $(y_1 = 6, y_2 = 3)$ es:

$$RMS_1^2\,(6, 3) = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 3.29.*

Dada la función de producción $x = -y_1^2 y_2 + 12y_1^2 + 4y_2$ con una combinación inicial de medios $y_1^0 = 0{,}5$ e $y_2^0 = 8$ la función de rendimiento (productividad) para el caso que $y_1^0 = 0{,}5k$ e $y_2^0 = 8k$ puede escribirse como:

La función de rendimiento para el caso que $y_1^0 = 0{,}5k$ e $y_2^0 = 8k$ puede escribirse de la forma:

$$x = -2k^3 + 3k^2 + 32k$$

2. ¿La cantidad de producto que corresponde al valor de la elasticidad de rendimiento $E_r = \frac{2}{3}$ es?

La función de rendimiento para el caso que:

$$y_1^0 = 0{,}5k \text{ e } y_2^0 = 8k$$

puede escribirse de la forma:

$$x = -2k^3 + 3k^2 + 32k$$

$$E_r = \frac{dx}{dk}\frac{k}{x} = \frac{-6k^2 + 6k + 32}{-2k^2 + 3k + 32}$$

Por tanto, para

$$k = 2 \qquad E_r = \frac{2}{3}$$

Además:

$$y_1 = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ e } y_2 = 8 \cdot 2 = 16$$

Luego:

$$x = -1^2 \cdot 16 + 12 \cdot 1^2 + 4 \cdot 16 = 60$$

3. ¿Los valores de la elasticidad de rendimiento relativo a la cantidad de producto $x = 48$ son?

En cuanto a los valores de la elasticidad de rendimiento relativo a la cantidad de producto $x = 48$, es preciso conocer previamente el valor de k, para lo cual se sustituye 48 en la función de rendimiento:

$$48 = -2k^3 + 3k^2 + 32k$$

$$(k + 4)(k - 4)(k - 1{,}5) = 0$$

$$k_1 = -4, k_2 = 4 \text{ y } k_3 = 1{,}5$$

Se observa que existen dos coeficientes de empleo que producen la misma cantidad de producto. Sustituyendo estos valores en la función de elasticidad:

$$k_2 = 4 \qquad E = \frac{-96 + 24 + 32}{-32 + 12 + 32} = -\frac{10}{3}$$

$$k_3 = 1{,}5 \qquad E = \frac{-13{,}5 + 9 + 32}{-4{,}5 + 4{,}5 + 32} = \frac{27{,}5}{32} = 0{,}85$$

EJERCICIO 3.30.

Si una empresa utiliza los inputs y_1 e y_2 para la obtención de los productos x_1 y x_2 según la función de producción conjunta $x_1^2 + x_2^2 - (2y_1 + 5)(y_2 + 1) - 1.300 = 0$ y los precios de los inputs son $q_1 = 8$ y $q_2 = 4$ y los de los productos son $p_1 = 4$ y $p_2 = 10$ la cantidad obtenida del producto x_2 será:

El equilibrio de la empresa implica que ha de cumplirse la siguiente cadena de ecuaciones:

$$-\frac{1}{q_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} = -\frac{1}{q_2}\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{1}{p_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}$$

que se obtiene maximizando la función de beneficios de la producción conjunta sujeta a la restricción de la función de producción; lo que se concreta en este caso en:

$$\frac{2}{8}(y_2 + 1) = \frac{1}{4}(2y_1 + 5) = \frac{2}{4}x_1 = \frac{2}{10}x_2$$

o bien simplificando:

$$\frac{1}{4}(y_2 + 1) = \frac{1}{4}(2y_1 + 5) = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{5}x_2$$

Esta cadena de ecuaciones y la función de producción constituye un sistema del que se obtienen la cantidad empleada de inputs y las obtenidas de productos. De la comparación de los primeros términos de la cadena anterior se obtiene la ecuación:

$$y_2 + 1 = 2y_1 + 5$$

Análogamente de la comparación entre las dos intermedias:

$$2y_1 + 5 = 2x_1$$

y finalmente de la igualdad entre los últimos:

$$5x_1 = 2x_2$$

Teniendo en cuenta las tres ecuaciones anteriores, la función de producción puede escribirse como:

$$x_1^2 + \frac{25x_1^2}{4} - 4x_1^2 - 1.300 = 0$$

De donde: $x_1^2 = 400$, $x_1 = 20$.

La cantidad obtenida del producto x_2 será: $x_2 = \dfrac{5 \cdot 20}{2} = 50$.

2. ¿La cantidad del input y_2 utilizada es?

La cantidad del input y_2 es:

$$y_2 = 2 \cdot 20 - 1 = 39$$

4. ¿Y la cantidad del input y_1 utilizada es?

La cantidad del input y_2 es: $y_2 = 2 \cdot 20 - 1 = 39$.

y del input y_1: $y_1 = \dfrac{39 + 1 - 5}{2} = 17{,}5$.

5. ¿Los ingresos de la empresa son?

Los ingresos de la empresa son: $I = p_1x_1 + p_2x_2 = 20 \cdot 4 + 50 \cdot 10 = 580$.

6. El beneficio que obtiene la empresa en el equilibrio es:

Los ingresos de la empresa son: $I = p_1x_1 + p_2x_2 = 20 \cdot 4 + 50 \cdot 10 = 580$.

Los costes de la empresa son: $C = q_1y_1 + q_2y_2 = 39 \cdot 4 + 17{,}5 \cdot 8 = 296$.

Por lo tanto, los beneficios serán: $B = I - C = 284$.

EJERCICIO 3.31.

Conocida una función de producción conjunta $x_1^2 + x_2^2 - (y_1 - 40)(y_2 - 20) = 0$ y siendo los precios de los outputs y de los inputs $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $q_1 = 2$ y $q_2 = 1$ respectivamente, el máximo ingreso que puede obtenerse con las cantidades de inputs $y_1 = 100$, $y_2 = 200$ es:

Habrá que maximizar la función de ingresos sujeta a la restricción de una curva de transformación de outputs:

$$W = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu \cdot [F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^2)]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$(1)\ \frac{\partial W}{\partial x_1} = p_1 + \mu \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial W}{\partial x_2} = p_2 + \mu \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

$$(3)\ \frac{\partial W}{\partial \mu} = F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) = 0$$

Es decir:

$$\frac{2x_1}{2x_2} = \frac{4}{8}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 10.800 = 0$$

De donde:

$$x_1 = 12\sqrt{15}$$
$$x_2 = 24\sqrt{15}$$

Por lo que el ingreso máximo será: $I = 240\sqrt{15}$.

2. ¿El coste más bajo con que es posible producir con $x_1 = 40$, $x_2 = 120$ es?

Para minimizar el coste, habrá que minimizar la función de los mismos sujeta a la restricción de una curva de transformación de outputs:

$$W = q_1 y_1 + q_2 y_2 + \mu \cdot [F(x_1, x_2, y_1^0, y_2^0)]$$

resolviendo mediante las condiciones de primer orden:

$$\frac{y_2 - 20}{y_1 - 40} = \frac{2}{1}$$
$$16.000 - (y_1 - 40)(y_2 - 20) = 0$$

y operando:

$$y_1 = 40\sqrt{5} + 40$$
$$y_2 = 80\sqrt{5} + 20$$

El correspondiente coste es: $C = 160\sqrt{5} + 100$.

EJERCICIO 3.32.

Dada ia función de producción $(x_1 + 1)^2(x_2 + 2)^2 - 25y^2 = 0$ si los precios de los outputs y del input son, respectivamente, $p_1 = 4$, $p_2 = 6$ y $q = 25$ los ingresos máximos que podrían obtenerse con una inversión de 1.500 unidades monetarias son:

Es una función de producción conjunta que depende de un sólo input y permite despejar el input y en función de los outputs:

$$y = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 2)}{5}$$

la función de costes será: $C = q \cdot y = 25\,\dfrac{(x_1 + 1)(x_2 + 2)}{5} = 5(x_1 + 1)(x_2 + 2)$.

Para hallar el ingreso máximo sujeto a una restricción de 1.500 unidades monetarias de coste:

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda \cdot [1.500 - 5(x_1 + 1)(x_2 + 2)]$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - \lambda 5(x_2 + 2) = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - \lambda 5(x_1 + 1) = 0$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1.500 - 5(x_1 + 1)(x_2 + 2) = 0$$

de donde:

$$x_1 = 15\sqrt{2} - 1$$
$$x_2 = 10\sqrt{2} - 2$$

El ingreso correspondiente será: $I = 120\sqrt{2} - 16 = 153,70$.

EJERCICIO 3.33.

Conocida la función de producción $x = 10y_1y_2 - 5y_1^2 - y_2^2$ y los precios de los inputs $q_1 = 10$ y $q_2 = 2$ la cantidad de máximo output que puede obtenerse con una inversión de 16.000 unidades monetarias es:

La maximización condicionada del output se obtiene mediante la resolución del sistema formado por la ecuación de trayectoria de expansión y la de condición de costes, es decir:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$
$$C^0 = q_1y_1 + q_2y_2$$

con los datos del ejercicio:

$$\frac{10y_2 - 10y_1}{10y_1 - 2y_2} = \frac{10}{2}$$
$$16.000 = 10y_1 + 2y_2$$

Operando resulta: $y_1 = 1.000$, $y_2 = 3.000$.

Con estas cantidades se obtiene un volumen de producción será:

$$x = 30.000.000 - 50.000.000 - 9.000.000 = 16.000.000$$

2. ¿El coste mínimo con que es posible producir 160.000 unidades de producto es?

La maximización condicionada del coste se resuelve mediante la resolución del sistema formado por la igualdad de las productividades marginales ponderadas y la correspondiente condición:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$
$$x^0 = f(y_1, y_2)$$

con los datos del ejercicio:

$$\frac{10y_2 - 10y_1}{10y_1 - 2y_2} = \frac{10}{2}$$
$$160.000 = 10y_1y_2 - 5y_1^2 - y_2^2$$

Operando se obtiene:

$$y_1 = 100 \qquad y_2 = 3.000$$

el coste de estas cantidades: $C = 1.000 + 600 = 1.600$.

EJERCICIO 3.34.

En la obtención del producto *x* pueden emplearse infinitos procedimientos técnicos caracterizados porque los costes medios variables representados por *b*, disminuyen a medida que aumentan los fijos, representados por *a*, según la relación $b = \dfrac{54}{a^{1/2}}$ así, la ecuación de costes del procedimiento más ventajoso para el volumen de producción $x = 8$, es:

El procedimiento más favorable es el que da lugar a los menores costes fijos, lo que se traduce en que ha de anularse las derivadas respecto a a en la función de costes totales:

$$CT = a + bx = a + \frac{54x}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{\partial Ct}{\partial a} = 1 - \frac{54x}{2a\sqrt{a}} = 0$$

$$\frac{54x}{2a\sqrt{a}} = 1$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 27x$$

o bien: $a = 9 \cdot x^{\frac{2}{3}}$.

Para el volumen de producción $x = 8$, el coste fijo es: $a = 9 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 36$.

El medio variable: $b = \dfrac{54}{\sqrt{36}} = \dfrac{54}{6} = 9$.

y el coste total: $CT = 36 + 9 \cdot 8 = 108$.

Coste que es mínimo, ya que la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 CT}{\partial a^2} = \frac{81x}{2a^2\sqrt{a}} > 0$$

La ecuación de costes lineal que corresponde al procedimiento técnico más favorable para dicha producción es: $CT = a + bx = 36 + 9x$.

EJERCICIO 3.35.

Conocida la función de producción $x = (y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{2/3}$ y los precios de los inputs $q_1 = 10$ y $q_2 = 20$ y siendo el coste fijo a 20($CF = 20$), la función de costes totales es:

La función de coste a corto plazo se expresa como una función del volumen de output en producción simple. Teniendo en cuenta que debe representar el coste mínimo para cualquier cantidad de output, tiene que cumplir las ecuaciones:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

$$x = f(y_1, y_2)$$

$$y_1 = h(x) \qquad y_2 = g(x)$$

en la segunda de las cuales x se conserva como variable. Con ambas ecuaciones es posible obtener las ecuaciones de los inputs en función de la cantidad de output.

Con los datos del problema:

$$\frac{\frac{1}{3}(y_1 - 4)^{-2/3}(y_2 - 2)^{2/3}}{\frac{2}{3}(y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{-1/3}} = \frac{10}{20}$$

$$x = (y_1 - 4)^{1/3}(y_2 - 2)^{2/3}$$

De la primera ecuación resulta:

$$(y_1 - 4) = (y_2 - 2)$$

y por sustitución en la segunda: $y_1 = x + 4$, $y_2 = x + 2$.

Los costes en función del output son: $C = 10(x + 4) + 20(x + 2) + 20$.

El coste total es: $C = 30x + 100$.

2. ¿La función de costes medios totales es?

La función de coste a corto plazo se expresa como una función del volumen de output en producción simple. Teniendo en cuenta que debe representar el coste mínimo para cualquier cantidad de output, tiene que cumplir las ecuaciones:

El coste medio total es: $CMT = 30 + \frac{100}{x}$.

3. ¿La función de costes marginales es?

El coste total es: $C = 30x + 100$.

El coste marginal es: $C_m = 30$.

EJERCICIO 3.36.

La función de producción de una empresa consta de dos factores sustituibles y uno limitativo, relacionados con la cantidad de producto según las funciones $(x-2)^3 = (y_1+5)^{1/2}(y_2+2)^{1/2}$, $y_3 = \dfrac{2x+153}{2}$, siendo los respectivos precios $q_1 = 2$, $q_2 = 0{,}5$ y $q_3 = 6$ entonces, la elasticidad del coste total para la cantidad de producto $x = 12$ es:

De la igualdad de las productividades marginales ponderadas y de la función de producción se despejan y_1 e y_2 en función de x, que llevadas a la ecuación de costes determinará la función de costes de la empresa.

$$x = (y_1+5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2+2)^{\frac{1}{6}} + 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{6}(y_1+5)^{-\frac{5}{6}} - (y_2+2)^{\frac{1}{6}} = 2\frac{1}{6}(y_1+5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2+2)^{-\frac{5}{6}}$$

$$(y_2+2) = 4(y_1+5)$$

Sustituyendo en la función de producción se tiene:

$$(x-2)^3 = 4(y_1+5)$$

$$y_1 = \frac{(x-2)^3}{2} - 5$$

$$y_2 = 4(y_1+5) - 2 = 2(x-2)^3 - 2$$

La función de costes será:

$$CT = 2\left(\frac{(x-2)^3}{2} - 5\right) + \frac{1}{2}[2(x-2)^3 - 2] + 6\,\frac{2x+153}{2}$$

$$CT = 2x^3 - 12x^2 + 30x + 432$$

La elasticidad del coste total será:

$$N_{CT} = \frac{C_m}{CT} = \frac{6x^2 - 24x + 30}{2x^2 - 12x + 30 + \dfrac{432}{x}}$$

para $x = 12$, $N_{CT} = \dfrac{606}{210} = \dfrac{101}{35}$.

2. ¿La elasticidad del coste medio para x = 12 es?

La elasticidad del coste medio:

$$N_{CM} = \frac{x}{\dfrac{CT}{x}} \frac{\partial\left(\dfrac{CT}{x}\right)}{\partial x} = \frac{x}{\dfrac{CT}{x}} \frac{xC_m - CT}{x^2}$$

$$N_{CM} = \frac{C_m - \left(\dfrac{CT}{x}\right)}{\dfrac{CT}{x}} = \frac{C_m}{\dfrac{CT}{x}} - 1 = N_{CT} - 1$$

$$\text{para } x = 12 \qquad N_{CM} = \frac{101}{35} - 1 = \frac{66}{35}$$

EJERCICIO 3.37.

Si los costes fijos de una empresa son 2.400.000 unidades de cuenta (euros), los costes medios totales 20.000 y los costes medios variables 14.000 ¿cuál es el volumen de output?

$$\frac{CV}{x} + \frac{CF}{x} = \frac{CT}{x} = 14.000 + \frac{2.400.000}{x} = 20.000$$

$$\frac{2.400.000}{x} = 6.000 \qquad x = 400$$

EJERCICIO 3.38.

La función de producción de una empresa consta de dos factores sustituibles y uno limitativo, relacionados con la cantidad de producto según las funciones $(x - 2)^3 = (y_1 + 5)^{1/2}(y_2 + 2)^{1/2}$, $y_3 = \dfrac{2x + 153}{2}$ siendo los respectivos precios $q_1 = 2$, $q_2 = 0{,}5$ y $q_3 = 6$ entonces, la elasticidad del coste total para la cantidad de producto $x = 12$ es:

De la igualdad de las productividades marginales ponderadas y de la función de producción se despejan y_1 e y_2 en función de x, que llevadas a la ecuación de costes determinará la función de costes de la empresa.

$$x = (y_1 + 5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2 + 2)^{\frac{1}{6}} + 2$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{6}(y_1 + 5)^{-\frac{5}{6}} - (y_2 + 2)^{\frac{1}{6}} = 2\frac{1}{6}(y_1 + 5)^{\frac{1}{6}} \cdot (y_2 + 2)^{-\frac{5}{6}}$$

$$(y_2 + 2) = 4(y_1 + 5)$$

Sustituyendo en la función de producción se tiene:

$$(x - 2)^3 = 4(y_1 + 5)$$

$$y_1 = \frac{(x - 2)^3}{2} - 5$$

$$y_2 = 4(y_1 + 5) - 2 = 2(x - 2)^3 - 2$$

La función de costes será:

$$CT = 2\left(\frac{(x - 2)^3}{2} - 5\right) + \frac{1}{2}[2(x - 2)^3 - 2] + 6\,\frac{2x + 153}{2}$$

$$CT = 2x^3 - 12x^2 + 30x + 432$$

La elasticidad del coste total será:

$$N_{CV} = \frac{x}{CV}\frac{\partial CV}{\partial x} = \frac{C_m}{CV} = \frac{6x^2 - 24x + 30}{2x^2 - 12x + 30}$$

$$\text{para } x = 12 \qquad N_{CV} = \frac{101}{29}$$

EJERCICIO 3.39.

Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente proposición: «el multiplicador de Lagrange en el contexto de la maximización de la producción sujeta a unos costes dados, es la inversa del coste marginal». Demuéstrelo.

Dado que los costes se pueden expresar como:

$$C = q_1 y_2 + q_2 y_2$$

diferenciando:

$$dC = q_1 dy_1 + q_2 dy_2$$

y dado que:

$$q_1 = \frac{f_1}{\beta} \qquad q_1 = \frac{f_2}{\beta}$$

$$dC = \frac{f_1}{\beta}\, dy_1 + \frac{f_2}{\beta}\, dy_2$$

$$dC = \frac{1}{\beta}\,(f_1\, dy_1 + f_1\, dy_1)$$

dividiendo por dx, siendo $x = f(y_1, y_2)$:

$$dx = f_1 dy_1 + f_2 dy_2$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{\beta}\,\frac{f_1 dy_1 + f_2 dy_2}{f_1 dy_1 + f_2 dy_2}$$

La proposición es pues verdadera, y quedando por tanto demostrado. Nótese que $\frac{dC}{dx}$ es lo que varía el coste total al variar la cantidad producida.

CAPÍTULO 4

Competencia perfecta: mercados de productos y de factores

La demanda a la que se enfrenta la empresa

EJERCICIO 4.1.

En un mercado de competencia perfecta la función de oferta es: $x^s = 0{,}5p - 5$ y la demanda $x^d = 55 - 2{,}5p$. Hallar la función de demanda para una empresa que opere en dicho mercado.

En el enunciado primero se identifica al problema como de competencia perfecta; luego se aprecia que las funciones se refieren al *mercado*. Es posible obtener el equilibrio de éste sin más que igualar oferta a demanda:

$$x^d = x^s = x \qquad -5 + \left(\frac{1}{2}\right)p = 55 - 2{,}5p$$

y operando:

$$\frac{1}{2}p + 2{,}5p = 55 + 5 \qquad p + 5p = 120 \qquad 6p = 120$$

de donde:

$$p = \left(\frac{120}{6}\right) = 20$$

Sustituyendo ahora en la función de demanda de mercado:

$$x^d = 55 - 2{,}5p = 55 - 2{,}5 \cdot 20 = 5$$

o en la de oferta de mercado, como comprobación:

$$x^s = -5 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 20 = -5 + 10 = 5$$

Se aprecia que se igualan las cantidades ofrecidas y demandadas para ese precio. Por otro lado la función de demanda a la que se enfrenta la empresa competitiva es *como si* fuera una recta horizontal paralela al eje de abcisas a la altura del precio de mercado. Por lo que, en este caso: la función de demanda solicitada es $p = 20$.

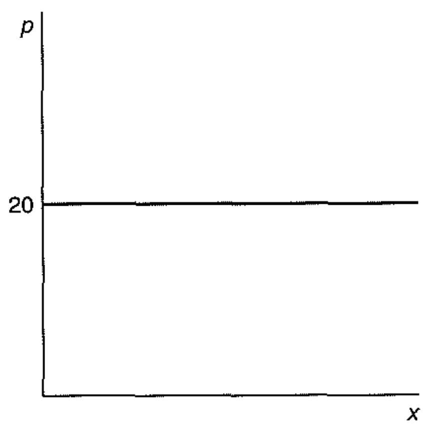

Figura 4.1

Equilibrio y su elasticidad

EJERCICIO 4.2.

Con los datos del problema anterior, obtenga la elasticidad de la demanda de mercado en el equilibrio.

La fórmula de la elasticidad de la demanda es:

$$E = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}$$

y derivando en $x^d = 55 - 2{,}5p$:

$$\frac{dx}{dp} = -2{,}5$$

p es simplemente p y x es la función entera $x^d = 55 - 0{,}5p$, por lo que sustituyendo en E:

$$E = (-)(-)2{,}5\frac{p}{55 - 0{,}5p}$$

(se explicitan los signos menos para recordar la convención de signos en este caso) y como $p = 20$:

$$E = \frac{2{,}5 \cdot 20}{55 - 2{,}5 \cdot 20} = \frac{50}{55 - 50} = \frac{50}{5} = 10$$

La demanda es, por tanto, en ese punto elástica.

Beneficios

EJERCICIO 4.3.

En un mercado de competencia perfecta existen 1.000 empresas que se reparten una demanda de mercado $x = 500 - 2p$. La tecnología de las empresas implica funciones de costes totales del tipo $CT_i = x_i^2 + 10x_i + 20$. Halle el equilibrio a corto plazo del mercado y de las empresas, y los beneficios individuales.

La maximización del beneficio por parte de la empresa individual implica hacer igual precio a coste marginal (suponiendo las condiciones de segundo orden, y que el precio sea superior al mínimo el coste medio variable) por lo que:

$$C_{mi} = 2x_i + 10 = p$$

$$x_i = \frac{p - 10}{2} = \frac{p}{2} - 5$$

por lo que la oferta global es:

$$\sum_{i=1}^{1.000}\left[\left(\frac{p}{2}\right) - 5\right] = 1.000\left(\frac{p}{2}\right) - 1.000 \cdot 5 = 500p - 5.000$$

Igualando la oferta a la demanda:

$$x^s = 500p - 5.000 = 500 - 2p = x^d$$
$$p = 10,95$$

de donde:

$$x_i = \frac{10,95 - 10}{2} = 0,475 \qquad i = 1, \ldots, 1.000$$

Que es lo que ofrece cada empresa. Los beneficios individuales son:

$$B_i = I_i - C_i = 10,95 \cdot 0,475 - (0,475)^2 - 10 \cdot 0,475 - 20 = 5,20 - 24,97 =$$
$$= -19,77 \text{ uu.cc. (euros)}$$

Función de oferta y output óptimo

EJERCICIO 4.4.

Una empresa cuya función de costes variables es $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$, trabaja en un mercado de competencia perfecta en el que el precio de mercado (p) es 20. Determinar la función de oferta de la empresa, el volumen de ouput óptimo y la elasticidad de la oferta en el equilibrio.

Elementos: competencia perfecta; costes variables; precio de mercado; se pide la E sobre x^s. Sabemos que para que la empresa esté en equilibrio debe hacer:

$$p = C_m$$

(además de $C_m > 0$ y $p \geq$ mínimo de los CMV). El enunciado nos da el p y podemos hallar los C_m sin más que hacer la primera derivada de los CV que nos la provee el enunciado, $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$. Operando:

$$C_m = \frac{dCV}{dx} = 3x^2 - 20x + 30 = p$$
$$3x^2 - 20x + 10 = 0$$

función cuadrática con dos raíces:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 120}}{6}$$

$$x_1 = 6{,}12 \quad \text{y} \quad x_2 = 0{,}5$$

(las condiciones de segundo orden eliminan a la raíz menor). La función de oferta es la función de C_m a partir del mínimo de los costes medios variables, y estos son fáciles de obtener:

$$CMV = \frac{CV}{x} = x^2 - 10x + 30$$

y tendrá un mínimo cuando:

$$\frac{dCMV}{dx} = 2x - 10 = 0 \qquad x = 5 < 6{,}12$$

(es decir, nótese que es inferior a la raíz máxima anterior o volumen de output óptimo para estos parámetros). La función de oferta de la empresa es por tanto:

$$3x^2 - 20x + 30 = p = 20 \qquad (x \geq 5)$$

La fórmula de la elasticidad es:

$$N = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x}$$

(nótese que sin signo menos, a diferencia de la demanda, ya que la oferta tiene pendiente positiva) p lo da el problema, en este caso 20, x lo hemos hallado, es 6,12 y $\left(\frac{dx}{dp}\right)$ se puede hacer sobre la ecuación anterior. Nótese que en este caso es más sencillo hacer $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ y tomar su inversa en la fórmula:

$$N = \frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}\frac{p}{x} = \frac{1}{(6x-20)}\frac{20}{6{,}12} = \frac{20}{(6 \cdot 6{,}12 - 20)6{,}12} = \frac{20}{102} = 0{,}195$$

Función de oferta que es, por tanto, inelástica.

Punto de cierre

EJERCICIO 4.5.

Una empresa que actúa en un mercado de competencia perfecta, está caracterizada por una función de costes variables $CV = x^3 - 10x^2 + 30x$. Establezca la cantidad mínima ofrecida.

Se trata tan sólo de hallar el punto de la curva de costes marginales, curva de oferta, donde arranca, es decir el mínimo de la de costes medios variables. Pero para esta misma función lo hemos hallado en el ejercicio anterior. El objetivo del problema es reparar en el significado de la cantidad mínima ofrecida. Por tanto la cantidad es $x = 5$.

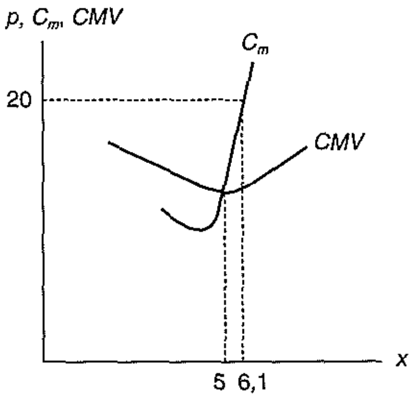

Figura 4.2

Output óptimo y cuantificación de beneficios

EJERCICIO 4.6.

Una empresa que actúa en un mercado de competencia perfecta está caracterizada por cuya función de costes totales $CT = x^3 - 10x^2 + 30x + 50$, la función de oferta de mercado es $x^s = 0{,}5p - 5$ y la demanda $x^d = 55 - 2{,}5p$. Obtener la cantidad que ha de ofrecer la empresa para maximizar su beneficio, así como los beneficios de la empresa.

En realidad lo que se hace es optimizar; o dicho de otro modo, a veces lo mejor que se puede hacer es minimizar las pérdidas. Esta última coletilla nos pone en guardia de que puede ser un caso especial en algún sentido. Debe notarse que el problema es una combinación de los anteriores; la diferencia es que en vez de darnos el precio, nos aporta las funciones de oferta y de demanda de mercado, por lo que tendrá que hallarse la primera. Pero precisamente para esas funciones lo obtuvimos ya en el Ejercicio 4.4 y el precio de equilibrio del mercado era $p = 20$. Ya sabemos que para maximizar el beneficio tendrá que hacer $I_m = C_m$, o lo que es lo mismo en este contexto $p = C_m$, al igual que en los problemas anteriores (con $C_m > 0$ y $p \geq CMV$).

Otra novedad es que la función de costes incluye los fijos (en este caso 50) y en consecuencia es de costes totales, pero el resto de la función es idéntica a la de los ejercicios anteriores. Ello en cambio permite obtener los beneficios, ya que en ausencia de los costes fijos no podrían ser determinados con precisión. En efecto, ahora, sin más que llevar a cabo unos productos y una resta:

$$IT = p \cdot x = 20 \cdot 6{,}12 = 122{,}4$$

$$CT = (6{,}12)^3 - 10(6{,}12)^2 + 30(6{,}12) + 50 = 229{,}2 - 374{,}5 + 183{,}6 + 50 = 88{,}28$$

$$B = IT - CT = 122{,}4 - 88{,}28 = 34{,}12$$

Precio de mercado

EJERCICIO 4.7.

Una empresa cuya función de costes es $CT = x^3 - 10x^2 + 30x + 50$ opera en un mercado en el que obtiene las mismas pérdidas funcione o no funcione. Hállese el precio vigente en dicho mercado.

COMENTARIO INICIAL. Cuando afirma que obtiene las mismas *pérdidas* tanto si funciona como si cierra obviamente se está refiriendo al mínimo de los costes medios variables (en el pierde todos los fijos actúe o no). Debe tenerse en cuenta. Pero no debe confundirse con el caso de un problema anterior en el que se afirmaba que la empresa «no obtiene ni beneficios ni pérdidas» (benefico extraordinario nulo).

El problema por lo demás es como los del tipo habitual, ya discutidos. Se trata de hallar el mínimo de explotación, donde pierde los costes fijos y donde:

$$I = CV \quad \text{y} \quad p = CMV$$

Además de que $p = C_m$, como es habitual y $C_m = CMV$. Ahora se halla fácilmente:

$$CV = x^3 - 10x^2 + 30x$$

(sin más que eliminar el término CF, o lo que es lo mismo aquí, 50) y el CMV (dividiendo por x) sabemos ya por ejercicios ateriores que tiene un mínimo para $x = 5$.

Otro método consiste en igualar coste marginal a medio. El C_m es $3x^2 - 20x + 30$ y al igualar *CMV* a C_m se simplifica la expresión:

$$x^2 - 10x + 30 = 3x^2 - 20x + 30$$

resultando:

$$2x^2 - 10x = 0 \qquad 2x - 10 = 0$$

$$2x = 10x \qquad x = 5$$

$$CMV = x^2 - 10x + 30 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$$

COMENTARIO. Se puede hallar igualmente haciendo $C_m(5) = p$.

Equilibrio a largo plazo

EJERCICIO 4.8.

Una empresa cuya función de costes es $CML = - x_i^2 + 4x_i$ está en situación de equilibrio a largo plazo en un mercado cuya función de demanda es $x^d = \dfrac{1.000}{p}$. Hállese la cantidad lanzada y el precio de mercado.

Debe repararse en la situación de equilibrio a largo plazo:

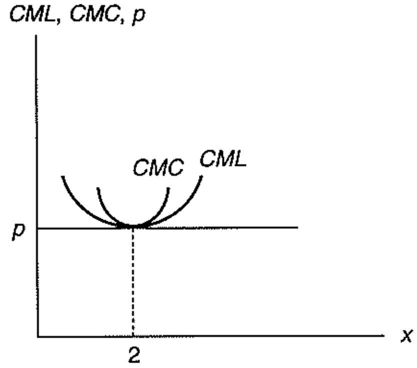

Figura 4.3

Bastará para obtener la cantidad de equilibrio lanzada por la empresa hallar el mínimo de los costes a largo:

$$CML = x_i^2 + 4x_i$$

que en este caso es:

$$-2x_i + 4 = 0 \qquad 2x_i = 4 \qquad x_i = 2$$

Y con el mínimo de los costes para esa cantidad, el coste-precio, es decir, la ordenada para ese volumen de producción es:

$$CML(x_i = 2) = 2^2 + 4 \cdot 2 = 12 = p$$

y para ese precio la demanda de mercado es:

$$x^d = \frac{1.000}{12} = 83{,}3$$

Número de empresas

EJERCICIO 4.9.

Con los datos del problema anterior hállese el número de empresas existentes en ese mercado y la elasticidad de la demanda en el equilibrio.

Como x^d es 83,3 el número de empresas es:

$$n = \frac{x^d}{x_i} = \frac{83{,}3}{2} = 41{,}6$$

Hallar ya la elasticidad es un proceso mecánico ya conocido por ejercicios anteriores, recordando que $\left(\frac{dx}{dp}\right)$ sobre la función de demanda que nos provee el enunciado es:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right) = -\frac{1.000}{p^2} = -\frac{1.000}{144} = -6{,}94$$

y sustituyendo en la fórmula de la elasticidad:

$$E = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -(-6{,}94)\frac{12}{83{,}3} = 1$$

Que tiene elasticidad unitaria [10].

[10] Quizá tendría más sentido calcular la elasticidad sobre la curva de demanda de mercado.

EJERCICIO 4.10.

La función de costes de una empresa que trabaja en régimen de competencia perfecta es $C = \left(\frac{2x^3}{3}\right) - 12x^2 + 82x + 576$. Determinar el beneficio o pérdida obtenido *si el precio vigente en el mercado es $p = 172$.*

Por tratarse de un mercado de competencia perfecta la empresa lanzará aquella cantidad que haga igual precio de mercado al coste marginal para esa cantidad:

$$C_m = 2x^2 - 24x + 82 = p = 172$$

Es decir:

$$x^2 - 12x - 45 = 0$$

ecuación cuya raíz positiva es la abscisa del punto A en la figura 4.4:

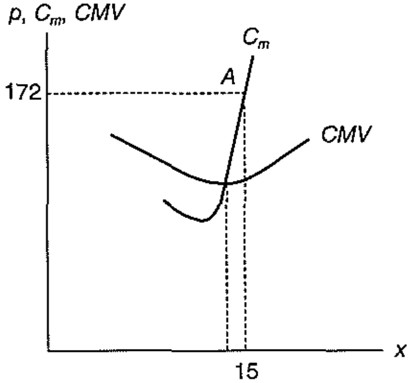

Figura 4.4

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{12 \pm 18}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

La cantidad ofrecida por la empresa es $x = 15$, y los ingresos que se obtienen son:

$$I = p \cdot x = 172 \cdot 15 = 2.580$$

Los costes totales resultan de sustituir $x = 15$ en la función de costes dada por el enunciado:

$$C = 2.250 - 2.700 + 1.230 + 576 = 1.356$$

de donde:

$$B = I - C = 2{,}580 - 1.356 = 1.224$$

EJERCICIO 4.11.*

En una industria la función de costes de adaptación parcial a largo que obedece a la expresión: $C = a + \dfrac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{4a}$, siendo a el parámetro que define a cada una de las empresas componentes. La función de demanda total del mercado es: $x(p - 3) = 3.120$. Determinar el número de empresas que abastecerán el mercado en el equilibrio a largo plazo.

A largo plazo la industria está formada por empresas con la dimensión óptima, que funcionan según su óptimo de explotación. Por tanto, el número de ellas resultará de dividir la cantidad demandada al precio igual al menor coste a largo plazo, por la dimensión óptima de la empresa:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = 1 - \frac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{4a^2} = 0$$

de donde:

$$a = \frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 40x)$$

y en consecuencia:

$$C_L = \frac{1}{2}(x^3 - 10x^2 + 40x) + \frac{(x^3 - 10x^2 + 40x)^2}{\left(\dfrac{4}{2}\right)(x^3 - 10x^2 + 40x)}$$

o lo que es lo mismo:

$$C_L = x^3 - 10x^2 + 40x$$

la dimensión óptima de la empresa corresponde al punto donde:

$$\frac{\partial C_L}{\partial x} = 2x - 10 = 0 \qquad x = 5$$

cantidad para la que el coste medio es mínimo y a su vez igual al precio que existirá en el mercado en la consideración a largo plazo, el cual será:

$$p = C_m = 3x^2 - 20x + 40 = 15 \qquad \text{en el punto} \qquad x = 5$$

a este precio la cantidad demandada es, según la función de demanda:

$$x = \frac{3.120}{15 - 3} = 260$$

luego el número de empresas que abastecerán el mercado será:

$$n = \frac{260}{5} = 52$$

Beneficios y precios

EJERCICIO 4.12.

Para una empresa que trabaja en un sector de competencia perfecta, tiene la siguiente función de costes totales $C = 2x^3 + 5x + 100$ y vende su producto obteniendo un beneficio de 3.900, determínese el el precio a que vende dicho producto.

Sabemos que en la situación de equilibrio el precio es igual al coste marginal de cada empresa; además se conoce el beneficio que viene dado por:

$$B = I - C = 3.900$$

Los ingresos en este caso vienen dados por ($C_m \cdot x$), es decir:

$$I = p \cdot x = C_m x = x \cdot (6x^2 + 5) = 6x^3 + 5x$$

Y como se conoce la función de costes totales, el beneficio se puede expresar de la siguiente forma:

$$B = 3.900 = 6x^3 + 5x - 2x^3 - 5x - 100$$
$$4x^3 = 4.000 \Rightarrow x = 10$$

para $x = 10$, el precio es:

$$p = C_m = 6x^2 + 5 = 600 + 5 = 605$$

EJERCICIO 4.13.

Tres empresas venden un producto homogéneo en un mecado de competencia perfecta, siendo las funciones de costes respectivamente: $C_1 = x^3 + 12x + 185$; $C_2 = 2x^2 + 12x + 40$; $C_3 = 4x^2 + 20x + 100$. Para el precio que existe en el mercado la tercera empresa no obtiene beneficios ni pérdidas. Determinar el beneficio de las dos restantes.

Como la tercera empresa no tiene ni beneficios ni pérdidas, ello quiere decir que ofrece la cantidad correspondiente al óptimo de explotación, esto es:

$$C_{m3} = 8x + 20 = CMT_3 = 4x + 20 + \left(\frac{100}{x}\right) \Rightarrow 4x^2 = 100 \qquad x = 5$$

Ahora ya se puede conocer el precio que existe en el mercado (el tema es algo trivial por el supuesto de información perfecta), ya que al ser igual al coste marginal de la empresa implica:

$$p = C_{m3} = 8x + 20 = 40 + 20 = 60 = p$$

Para este precio la primera empresa ofrece la cantidad de producto:

$$p = 60 = C_{m1} = 3x^2 + 12 \qquad x = 4$$

obteniendo unos ingresos:

$$I_1 = p \cdot x_1 = 4 \cdot 60 = 240$$

y como los costes totales son:

$$C_1 = 64 + 48 + 185 = 297$$

Lo que da un pérdida de 57 unidades de cuenta (euros). Sin embargo, le interesa seguir produciendo porque cubre parte de los *costes fijos*. Por su parte la segunda empresa:

$$p = 60 = 4x + 12 \qquad x = 12$$
$$I_2 = p \cdot x = 60 \cdot 12 = 720$$
$$C_2 = 288 + 144 + 40 = 472$$

Con lo que obtiene un beneficio extraordinario de:

$$B_2 = I_2 - B_2 = 720 - 472 = 248$$

EJERCICIO 4.14.

Una empresa tiene una función de costes medios variables $CMV = 2x^2 - 10x + 36$, determinar los costes fijos, sabiendo que en un mercado de competencia perfecta si el precio fuese $p = 260$, el beneficio neto sería 1.300 unidades.

A partir de la función de costes variables:

$$CV = 2x^3 - 10x^2 + 36x$$

se obtiene la de costes marginales $C_m = 6x^2 - 20x + 36$ que se iguala al precio de mercado, $p = 260$:

$$260 = 6x^2 - 20x + 36$$

$$3x^2 - 10x - 112 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(25 \pm 336)}}{3} = \frac{5 \pm 19}{3} = 8$$

Para esta cantidad de producto la empresa obtiene unos ingresos:

$$I = p \cdot x = 260 \cdot 8 = 2.080$$

en tanto que los costes variables serían:

$$CV = 1.024 - 640 + 288 = 672$$

y como el beneficio es 1.300 puede establecerse la igualdad:

$$1.300 = 2.080 - 672 - CF$$

de donde los costes fijos son:

$$CF = 108$$

Costes marginales y costes fijos

EJERCICIO 4.15.

Una empresa que fabrica *puzzles* está caracterizada por una función de costes marginales $C_m = 3x^2 - 20x + 30$, y opera en un mercado de competencia perfecta en el que el precio es tal que la empresa se nivela (no obtiene ni beneficios extraordinarios ni pérdidas). Determínense los costes fijos de la empresa.

COMENTARIO PREVIO. Este problema es claramente irreal; es un *puzzle*, y de aquí el juego de palabras del enunciado. Las empresas conocen su tecnología y los precios de los mercados tanto de productos como de factores en los que trabajan. Con razón de más conocen sus costes fijos, por lo que el ejercicio es muy artificioso; sin embargo algunos similares son relativamente comunes en la literatura, razón por la que se introduce aquí.

Aceptando el planteamiento, el hecho no habitual de dar como datos los C_m (cuando siempre los teníamos que obtener derivando, como un resultado) no tiene que hacer sospechar que el «proceso de resolución» es inverso a los anteriores. Lo que dice el problema es que el *óptimo de explotación* (beneficios extraordinarios nulos) es decir, el mínimo de los costes medios *totales* para el que por otro lado es igual al coste marginal, se obtiene para un volumen de producción tal que se nivela (es decir, no obtiene ni beneficios ni pérdidas extraordinarias, por definición, es decir, porque lo dice el enunciado del problema).

Por otro lado se obtienen los costes totales mediante el proceso inverso al normal de pasar de los costes totales a marginales, es decir, *integrando* (como es bien conocido, la integral es la operación inversa de la derivación habitual):

$$CT = \int C_m = \int (3x^2 - 20x + 30)dx$$

$$CT = x^3 - 10x^2 + 30x + CF$$

de donde los costes medios serán:

$$CMT = \frac{x^3 - 10x^2 + 30x + CF}{x} = x^2 - 10x + 30 + \frac{CF}{x}$$

Pero en el mínimo se debe cumplir que su derivada tiene que ser igual a cero:

$$\frac{dCMT}{dx} = 2x - 10 - \frac{CF}{x^2} = 0$$

por lo que cualquier cuantía de coste fijo que verifique la ecuación sería un coste fijo admisible. Por ejemplo $CF = 0$ y $x = 5$, o $CF = 10$ y $x = 5{,}1859$. Como estos valores no son fáciles de hallar, quizá sería mejor pedir el enunciado la expresión que debe verificar los costes fijos que sería $CF = 2x^3 - 10x^2$.

Se comprueba que es un mínimo al hacer:

$$\frac{d^2CMT}{dx^2} = 2 + \frac{2CF}{x^3} > 0$$

Demanda de factores y empresa competitiva

EJERCICIO 4.16.

Dado un mercado de competencia perfecta cuya curva de demanda es $p = 10 - \frac{1}{2}x$, cuyas empresas producen según una función de producción $x = 2y$. Hallar la productividad marginal del factor, la curva de demada del mismo y si la cantidad utilizada del factor es 5 el precio del factor en el equilibrio:

Si la función de producción es $x = 2y$, la productividad marginal de y es:

$$\frac{dx}{dy} = 2$$

y la función de demanda del factor por parte de la empresa es:

$$q = \left(\frac{dx}{dy}\right)p = 2p$$

El precio del factor para la configuración del enunciado será:

$$q = 2\left(10 - \frac{1}{2}2y\right) = 20 - 2y$$

$$y = 5 \qquad q = 20 - 2 \cdot 5 = 10$$

EJERCICIO 4.17.

Siendo una función de utilidad consumo-ocio como $u = x(x_o)^2$, en la que x es un bien compuesto de los restantes bienes distintos del ocio (x_o), determine las cantidades demandadas de ocio y trabajo y el índice de utilidad, si los precios y la renta están dados para el consumidor por: $p = 2$, $w = 50$ e $y_o = 70$ (donde w es el salario por unidad de tiempo).

Sabemos que en el equilibrio se debe cumplir:

$$RMS^{x}_{x_o} = -\frac{dx}{dx_o} = \frac{u_{xo}}{u_x} = \frac{w}{p}$$

por lo que calculando las derivadas correspondientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x_o)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_o} = 2xx_o$$

es fácil obtener una expresión para x:

$$\frac{2xx_o}{x_o^2} = \frac{50}{2}$$

$$4xx_o = 50(x_o)^2$$

$$x = \frac{50}{4}x_o$$

Por su parte, la restricción presupuestaria, es:

$$px = y = w(24 - x_o) + y_0$$

de donde:

$$2x = 50(24 - x_o) + 70$$

por lo que, sustituyendo la x obtenida:

$$2\frac{50}{4}x_o = 50 \cdot 24 - 50x_o + 70$$

$$25x_o = 1.270 - 50x_o$$

$$x_o = 16{,}9$$

que es la cantidad demandada de ocio. La cantidad de trabajo se halla trivialmente (basta restar de 24 horas) L, por último, es $24 - 16{,}9 = 7{,}1$ horas, además:

$$2x = 50(24 - 16{,}9) + 70$$

Es interesante, en cambio, determinar x, y a partir de ella el índice de utilidad; L, por último, es 7,1 horas.

Por otro lado, la restricción presupuestaria es:

$$px = w(H - x_o) + y_0$$

de donde:

$$x = \frac{w}{p}(H - x_o) + \frac{y_0}{p}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_o} = -\frac{w}{p} = -\frac{50}{2} = -25$$

$$y = p \cdot x = \text{renta} = \text{gasto}$$

y cuando:

$$x_o = 24 \qquad x = \left(\frac{50}{4}\right)24 = 300 \qquad px = y = 600$$

$$2x = 50(24 - 24) + 70 = 70 \qquad x = 35$$

$$x_o = 0 \qquad p \cdot x = wH + y_0 = 2x = 5024 + 70 = 1.270$$

$$x = \frac{1.270}{2} = 635$$

$$x_o = 16{,}9 \qquad 2x = 50(24 - 16{,}9) + 70 = 212{,}5$$

La combinación de equilibrio, por tanto, es $x_o = 16{,}9$, $x = 212{,}5$. Por lo que el índice de utilidad es:

$$u = x(x_o)^2 = 3.570$$

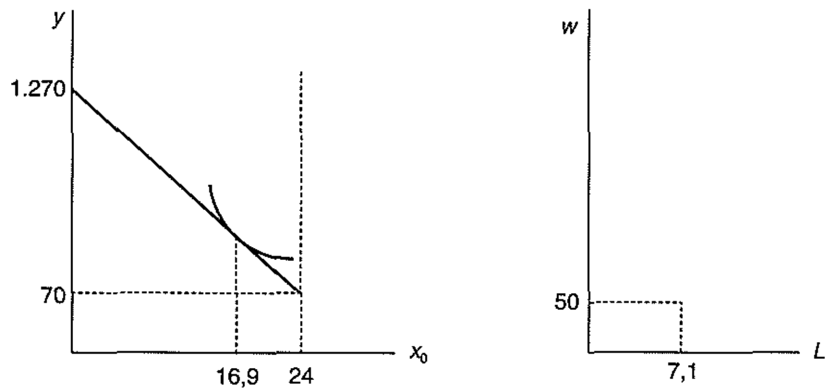

Figura 4.5

Salarios mínimos

EJERCICIO 4.18.

Con los datos del problema anterior establezca el salario mínimo que induce a ofrecer trabajo al consumidor. Si las horas extras, a partir de ocho horas de trabajo, se pagan ahora a $w^{(2)} = 65$ unidades de cuenta la hora, ¿cómo variará la configuración de equilibrio?.

Si el consumidor no ofreciese ninguna hora de trabajo, todas sus horas disponibles irían al ocio. Se debe cumplir en todo caso, la igualdad de las relación marginal de sustitución al cociente invertido de los precios:

$$\frac{2xx_o}{x_o^2} = \frac{2 \cdot 35 \cdot 24}{24 \cdot 24} = \frac{w}{2} \qquad \frac{140}{24} = w = 5{,}83$$

ya que si no trabaja:

$$y = y_0 + w \cdot 0 = y_0 = 70$$

$$x = \frac{y}{p} = \frac{70}{2} = 35$$

por todo lo que:

$$w = 5{,}83$$

Bastaría aplicar el método del ejercicio anterior para el nuevo salario aunque deberán compararse los índices de utilidad. Y debe notarse, que anteriormente no se llegaba a la jornada institucional *tradicional* de 8 horas.

CAPÍTULO 5

Monopolio con una y varias plantas, monopsonio y discriminación de precios: productos y factores

Output, precio, beneficio y tramo elástico

EJERCICIO 5.1.

Sea una empresa monopolista de oferta, cuya función de costes es $C = x^2 + x + 100$, siendo la función de demanda de mercado a la que se enfrenta $x = 20 - p$. Establezca el volumen de beneficio si lo hay, y discuta si el monopolista se sitúa o no en el tramo elástico.

La primera condición de equilibrio es:

$$I_m = C_m$$

por lo que operando:

$$I = px = (20 - x)x = 20x - x^2$$
$$I_m = 20 - 2x$$
$$C_m = 2x + 1$$

Luego:

$$2x + 1 = 20 - 2x \qquad 4x = 19$$

$$x_M = \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Por lo que sustituyendo en la función de demanda inversa el precio de monopolio:

$$p_M = 20 - x = 15{,}25$$

La condición de segundo orden es en este caso:

$$I'_m = -2 < C'_m = 2$$

Y la elasticidad:

$$E = -\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = -(-)\frac{15{,}25}{4{,}75} = 3{,}21 > 1$$

Luego el monopolista se sitúa en el tramo elástico de la curva de demanda. Los costes totales son:

$$C = 22{,}56 + 4{,}75 + 100 = 127{,}31$$

y los ingresos totales:

$$I = 72{,}43$$

$$B = I - G = 72{,}43 - 127{,}31 = -54{,}88$$

Por lo que los beneficios son:

$$B = -54{,}88$$

Optimización

EJERCICIO 5.2.

Una empresa monopolista cuya función de costes es $CV = 2x^3 - 10x^2 + 50x$ se enfrenta a la función de demanda, $x = 48 - p$. Obtener el precio y cantidad para los que la empresa maximiza su beneficio.

Sabemos por la teoría correspondiente que las condiciones de maximización del beneficio para un monopolio son:

$$I_m = C_m \qquad I'_m < C'_m \qquad p \geq \text{mín } CMV$$

Como $I = px$ y a su vez la función de demanda puede reescribirse como $p = 48 - x$, entonces los ingresos totales son:

$$I = px = (48 - x)x = 48x - x^2$$

de donde los marginales son $I_m = 48 - 2x$.

Por otro lado el coste marginal se obtiene directamente (derivando) de la función de costes de que nos provee el enunciado del problema:

$$C_m = 6x^2 - 20x + 50$$

Igualando I_m a C_m:

$$48 - 2x = 6x^2 - 20x + 50$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{276}}{12} = \frac{18 \pm 16{,}61}{12}$$

de donde $x_1 = 0{,}12$ y $x_2 = 2{,}88$. Como sólo x_2 $(= 2{,}88)$ cumple la condición de segundo orden:

$$I'_m = -2 < C'_m = 12x - 20 = 12 \cdot 2{,}88 - 20 = 14{,}56$$

y además:

$$CMV = 2x^2 - 10x + 50 = 2(2{,}88)^2 - 10(2{,}88) + 50 = 37.79$$

$$CMV(2{,}88) = 37{,}79 < p = 48 - 2{,}88 = 45{,}12$$

Resultados de la actividad y elasticidades

EJERCICIO 5.3.

Una empresa monopolista cuya función de costes totales es $CT = 0{,}2x^2 + x + 70$, se enfrenta a la función de demanda de mercado, $x = 30 - 2p$. Obtener los resultados de la empresa y la elasticidad de la demanda en el equilibrio.

El problema es igual que los anteriores, sólo que además es necesario calcular el valor absoluto de los beneficios y, por ende, de los ingresos y costes (y no sólo los marginales como en los anteriores). Por lo tanto, operando al modo ya habitual:

$$I = px = (15 - 0{,}5x)x$$

$$I_m = 15 - x \qquad C_m = 0{,}4x + 1$$

$$I_m = C_m \Rightarrow x_M = 10$$

$$p = 15 - 0{,}5 \cdot 10 = 10$$

$$E = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = -(-2)\frac{10}{10} = 2 > 1$$

Pero calcular B es trivial por lo sencillo:

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

$$I(x) = 10 \cdot 10 = 100$$

$$C(x) = 0{,}2 \cdot 10^2 + 10 + 70 = 100$$

Luego el beneficio extraordinario es nulo en este caso. Es decir, que la función de costes medios es tangente a la de demanda para el volumen de output óptimo de equilibrio, de maximización del beneficio, o de otro modo que se cumple para ese volumen de output que, $p = CMV$.

Monopolio con dos plantas

EJERCICIO 5.4.

Si una estructura de mercado monopolista de oferta, en la que la empresa dispone de dos plantas, cuyas funciones de costes son, $C_1 = 10x_1^3 - 20x_1 + 30$, $C_2 = 22x_2^2 + 15x_2 + 5$, y el precio de mercado es 150 euros, determine el equilibrio para la empresa: (a) si la empresa produce independientemente en cada una de las dos plantas, y (b) si produce interrelacionadamente.

1. Planteemos primero la maximización del beneficio (hipótesis de equilibrio), conjuntamente:

$$B = I - C = px_1 + px_2 - C_1 - C_2$$

$$B = 150(x_1 + x_2) - 10x_1^3 + 20x_1 - 30 - 22x_2^2 - 15x_2 - 5$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 150 - 30x_1^2 + 20 = 0$$

$$30x_1^2 = 170$$

$$x_1^2 = \frac{17}{3}$$

$$x_1 = 2{,}38$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 150 - 44x_2 - 15 = 0$$

$$x_2 = \left(\frac{135}{44}\right) = 3{,}06$$

Cuyas condiciones de segundo orden son:

$$B_1' = -60x_1 \qquad B_2' = -44$$

ambas menores que cero, para los valores de equilibrio de x_1 y x_2, luego estos son los máximos relativos.

2. Veamos lo que ocurre si produce con total independencia, es decir, maximiza el beneficio en cada planta:

$$B = 150x_1 - 10x_1^3 + 20x_1 - 30$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 150 - 30x_1^2 + 20 = 0$$

$$170 = 30x_1^2$$

$$x_1^2 = \left(\frac{170}{30}\right)$$

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{170}{30}\right)} = 2{,}38$$

Para la segunda planta:

$$B = 150x_2 - 22x_2^2 - 15x_2 - 5$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 150 - 44x_2 - 15 = 0$$

$$x_2 = 3{,}06$$

Que suman los mismos volúmenes de output que para maximización conjunta del beneficio.

EJERCICIO 5.5.

Suponga un monopolio con dos plantas cuyas funciones de costes respectivas son $C_1 = 0{,}51x_1^2$, $C_2 = x_2^2 + 2x_2 + 3$; obtenga el equilibrio de la empresa y los beneficios, con especificación de las imputaciones a cada una de las plantas, si la función de demanda de mercado a la que se enfrenta es $x = 100 - 5p$.

La curva de demanda de mercado puede reescribirse como:

$$p = 20 - 0{,}2x$$

y la función de beneficio conjunto:

$$B = I - C = I - C_1 - C_2 = (20 - 0{,}2x)x - 0{,}51x_1^2 - x_2^2 - 2x_2 - 3$$

Para maximizarla será necesario hacer, al modo ya habitual:

$$I_m = C_{m1}$$

$$I_m = C_{m2}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$I = 20x - 0{,}2x^2$$

$$I_m = 20 - 0{,}4x$$

$$I_m = C_{m1} = 20 - 0{,}4x_1 = 1{,}02x_1$$

$$I_m = C_{m2} = 20 - 0{,}4x_2 = 2x_2 + 2$$

$$x_1 = 14{,}08$$

$$x_2 = 7{,}5$$

$$x = x_1 + x_2 = 21{,}58$$

$$p = 20 - 0{,}2 \cdot 21{,}58 = 15{,}68$$

$$B = I - C = 338{,}37 - 185{,}35 = 153{,}02$$

Intervenciones reguladoras

EJERCICIO 5.6.

Ante un mercado monopolista, la autoridad económica quiere estimular ia producción del mismo a través de una intervención reguladora consistente en establecer un precio máximo. Calcular dos alternativas, una relativa a obtener el mayor output, y otra que llevaría a cubrir los costes tan sólo. La función inversa de demanda de mercado es $p = 100 - 0{,}2x$ y la de costes del monopolista es $C = 0{,}5x^2 + 60x$.

La teoría nos enseña que:

1. Si el monopolio no estuviese regulado haría $I_m = C_m$.
2. Que la primera alternativa es hacer $IM = C_m$.
3. Que la segunda es hacer $IM = CM$.

Calculando primero la segunda:

$$1) \quad IM = \frac{IT}{x} = \frac{px}{x} = p = 100 - 0{,}2x$$

y:

$$C_m = x + 60$$
$$IM = C_m = 100 - 0{,}2x = x + 60$$

de donde:

$$x = 33{,}33$$

y:

$$p = 100 - 0{,}2 \cdot 33{,}33 = 93{,}33$$

La tercera alternativa es:

$$3) \quad IM = CM = 100 - 0{,}2x = \frac{C}{x} = \frac{0{,}5x^2 + 60x}{x} = 0{,}5x + 60$$

ecuación en x, de la que se obtiene como solución:

$$x = 57{,}14$$

siendo p ahora, 88,57.

Conviene analizar, por último, si esas acciones logran sus objetivos, al compararlas con la situación de monopolio puro, calculando la alternativa 1), $I_m = C_m$. Pero para ello necesitamos primero el IT:

$$IT = (100 - 0{,}2x)x = 100x - 0{,}2x^2$$

de donde:

$$I_m = 100 - 0{,}4x = C_m = x + 60$$

siendo ahora $x = 28{,}57$ y $p = 94{,}28$. Se observa, por tanto, que el output aumenta con ambas alternativas, pero más con la segunda, como era de esperar, de acuerdo con la teoría.

Discriminación de precios: primer grado

EJERCICIO 5.7.

Un monopolista cuya función de costes es $CT = 8x + 6$, que abastece un mercado cuya curva de demanda es $x = 1.000 - 50p$, observa que puede llevar a cabo una discriminación de primer grado: calcular cantidad producida, el beneficio, y compararlo con el que obtenía como monopolista puro.

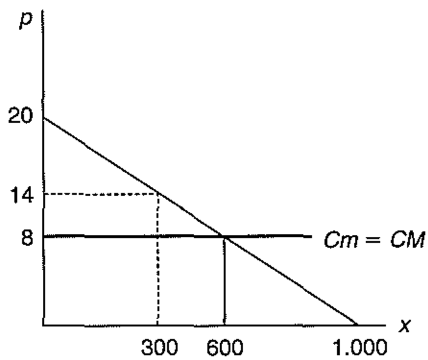

Figura 5.1

Vamos a obtener primero la solución del monopolista puro: La función inversa de demanda se puede escribir:

$$p = 20 - 0{,}02x$$

por lo que los ingresos totales del monopolista puro serían:

$$IT = px = (20 - 0{,}02x)x = 20x - 0{,}02x^2$$

De ellos se obtienen los ingresos marginales:

$$I_m = 20 - 0{,}04x$$

y derivando en los costes totales, los costes marginales:

$$C_m = 8$$

que igualados a los ingresos marginales:

$$I_m = C_m = 20 - 0{,}04x = 8$$

permiten obtener el output de máximo beneficio:

$$x = 300$$

El precio correspondiente, se obtiene a partir de la función de demanda:

$$p = 20 - 0{,}02 \cdot 300 = 14$$

El ingreso total es:

$$IT = 14 \cdot 300 = 4.200$$

El coste total es:

$$CT = 8 \cdot 300 + 6 = 2.406$$

Por lo que el beneficio del monopolista puro es:

$$B = IT - CT = 4.200 - 2.406 = 1.794$$

Vamos a ver ahora el caso del monopolista discriminador de primer grado:

La cantidad total que va a vender es la que correspondería a:

$$C_m = 8 = p = 20 - 0{,}02x$$

de donde $x = 600$.

El ingreso total es el que acapara todo el excedente del consumidor, es decir:

$$IT = 600 \cdot 8 + \frac{(20 - 8)600}{2} = 8.400$$

El coste total es el correspondiente a 600 unidades de producto, es decir:

$$CT = 8 \cdot 600 + 6 = 4.806$$

Por lo que el beneficio para el monopolista discriminador es:

$$B = IT - CT = 8.400 - 4.806 = 3.594$$

siendo la diferencia de 1.800 unidades de cuenta.

EJERCICIO 5.8.

Un monopolista que se enfrenta a la curva de demanda $p = 1.000 - 88x$, a partir de una curva de costes como $C = x^2 + 100x + 10$, trata de calcular si le es interesante discriminar precios del tipo *primer grado.*

Como en la discriminación de primer grado el monopolista drena todo el excedente del consumidor, la curva de demanda es la de ingresos marginales también además de ser la de ingresos medios, por lo que, para maximizar beneficios deberá hacer:

$$C_m = 2x + 100 = p = 1.000 - 88x$$

de donde se obtienen la cantidad:

$$90x = 900 \qquad x = 10$$

y el precio:

$$p = 1.000 - 88 \cdot 10 = 120$$

Nótese que los ingresos se pueden estimar mediante las áreas de un rectángulo (precio de mercado por cantidad) y un triángulo (el que forma el precio de mercado el precio máximo permitido por la curva de demanda y la cantidad ofrecida); en efecto:

$$\text{Área del rectángulo} = 120 \cdot 10 = 1.200$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{(1.000 - 120)10}{2} = 4.400$$

$$IT = 5.600$$

Como los costes son:

$$C(10) = 1.110$$

los beneficios resultarán:

$$B = 4.490$$

El monopolio puro maximiza beneficios cuando:

$$C_m = 2x + 100 = I_m = 1.000 - 176x$$

de donde

$$x = 5{,}05 \qquad \text{y} \qquad p = 1.000 - 88 \cdot 5{,}05 = 555{,}6$$

de donde los beneficios son:

$$B = IT - CT = 2.805{,}78 - 540{,}5 = 2.265{,}28$$

Luego le es interesante la discriminación, como cabía esperar.

Discriminación de precios: segundo grado

EJERCICIO 5.9.

Sea una empresa monopolista cuyos costes vienen representados por la función $C = 5x^2 + 100x + 5$, y la función inversa de demanda, $p = 1.000 - 10x$. La empresa se plantea discriminar precios, en dos tramos (segundo grado), con la convicción de que ello implicará mejorar los beneficios globales. Realice el tipo de cálculos que dicha empresa debería llevar a cabo, y coméntelos.

En primer lugar hemos de disponer de la situación inicial de la empresa, es decir, en monopolio puro, al modo habitual; la estructura de ingresos es:

$$I = (1.000 - 10x)x = 1.000x - 10x^2$$
$$I_m = 1.000 - 20x$$

y la de costes habitual:

$$C_m = 10x + 100$$

Igualando las dos entidades marginales:

$$I_m = C_m \qquad 1.000 - 20x = 10x + 100 \qquad 30x = 900$$

se obtienen la cantidad y el precio de equilibrio, ambos de monopolio puro:

$$x_M = 30$$

$$p_M = 1.000 - 10 \cdot 30 = 700$$

y los beneficios si los hay:

$$B(30) = I(30) - C(30) = 21.000 - 7.505 = 13.495$$

en este caso sí. Aunque los beneficios son positivos, como es de esperar, probablemente en un monopolio, poco importa ahora desde el punto analítico, el hecho es que la empresa trata de aumentarlos.

2. Un paso previo es analizar el límite, en términos de cantidades, que la potencial discriminación, podría plantear. Este límite podría estar en la cantidad que haga igual la demanda y la curva de costes marginales como *curva de oferta*:

   $$C_m = p = 10x + 100 = 1.000 - 10x$$

   es decir:

   $$x = 45$$

   que implica aumentar la producción en 15 unidades. De ellas, el primer tramo podría estar constituido por 25, y el segundo por 20; en último término ello es arbitrario para la empresa (o negociable con los compradores).

3. El precio de venta de las 25 primeras unidades se determina sobre la función de demanda como:

$$p = 1.000 - 10 \cdot 25 = 750$$

y para el de las 20 restantes debe tenerse en cuenta que son adicionales, sobre la función de demanda:

$$p = 1.000 - 10 \cdot 45 = 550$$

Ahora es posible calcular los ingresos correspondientes a los dos tramos:

$$I(25) = 25 \cdot 750 = 18.750$$

$$I(20) = 20 \cdot 550 = 11.000$$

y los ingresos totales:

$$I = 29.750$$

Los costes totales de producir 45 unidades son:

$$C(45) = 5 \cdot 45^2 + 100 \cdot 45 + 5 = 14.630$$

Por lo que los beneficios son:

$$B = 34.750 - 14.630 = 20.120$$

Por lo que la discriminación de precios aumenta los beneficios como era previsible.

Discriminación de precios: tercer grado

EJERCICIO 5.10.

Suponga un monopolio puro que observa que su mercado está segmentado en dos partes cuyas funciones de demanda respectivas son $x_1 = 25 - 0{,}3p_1$, $x_2 = 35 - 0{,}7p_2$ y su función de costes es $CT = 20x + 2$. Discuta si es posible la discriminación, y compare la solución (beneficios) con la que se daría en monopolio puro.

Veamos algo de teoría previa. Se trata de una discriminación de tercer grado. Sabemos que en monopolio puro se cumple que $I_m = p\left(1 - \frac{1}{E}\right)$, por lo que, dada la definición de discriminación de tercer grado, como la división del mercado en submercados con elasticidades diferentes, tendríamos:

$$I_{m1} = p_1\left(1 - \frac{1}{E_1}\right)$$

$$I_{m2} = p_2\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)$$

siendo E_1 y E_2 –obviamente– las elasticidades de demanda en los dos submercados. Como I_{m1} debe ser igual a I_{m2}, porque ambos deben ser iguales a C_m, está claro que debe cumplirse también la igualdad:

$$p_1\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)$$

O, alternativamente, y reordenando:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{E_1}\right)}$$

Si, por reducción al absurdo $E_1 = E_2$, entonces $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$, o lo que es lo mismo, $p_1 = p_2$, y no se puede dar discriminación; es decir, si las elasticidades son iguales no es posible discriminar; o dicho de otro modo, las diferentes elasticidades son una precondición para hacerlo. Si, por el contrario, $E_1 \neq E_2$ el precio será *menor* en el mercado cuya demanda sea *más* elástica en valor absoluto. En efecto:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \frac{1}{E_2}}{1 - \frac{1}{E_1}} \qquad p_1 > p_2 \qquad \text{si}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_2}\right) > \left(1 - \frac{1}{E_1}\right)$$

Lo que sucederá si, en valor absoluto, E_1 es menor que E_2. En efecto, en:

$$p_1\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)$$

y si:

$$|E_1| < |E_2| \qquad \text{entonces}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) < \left(1 - \frac{1}{E_2}\right) \qquad \text{o} \qquad I_{m1} < I_{m2}$$

y para que I_{m1} sea igual a I_{m2}, p_1 debe ser mayor que p_2.

Apliquemos esta teoría a los datos del problema. Debe apreciarse que las funciones inversas de demanda son:

$$p_1 = 83{,}3 - 3{,}3x_1$$
$$p_2 = 50 - 1{,}42x_2$$

y la directa e inversa de mercado total es:

$$x = 60 - p \qquad p = 60 - x$$

El coste marginal, constante, es 20. Como monopolista puro la empresa obtenía:

$$IT_M = px = (60 - x)x = 60x - x^2$$
$$I_m = 60 - 2x = C_m = 20$$
$$x = 20$$
$$p = 40$$
$$B = px - CT = 800 - 402 = 398$$

Como discriminador, y por el mismo método:

$$IT_1 = p_1x_1 = (83{,}3 - 3{,}3x_1)x_1 = 83{,}3x_1 - 3{,}3x_1^2$$
$$I_{m1} = 83{,}3 - 6{,}6x_1 = C_m = 20$$
$$x_1 = 9{,}5$$
$$p_1 = 83{,}3 - 3{,}3 \cdot 9{,}5 = 51{,}95$$
$$IT_1 = 493{,}5 \qquad CT_1 = 192$$
$$B_1 = 301{,}5$$

para el primer submercado. Y para el segundo:

$$IT_2 = p_2x_2 = (50 - 1{,}42x_2)x_2 = 50x_2 - 1{,}42x_2^2$$
$$I_{m2} = 50 - 2{,}84x_2 = 20 = C_m$$
$$x_2 = 10{,}5$$
$$p_2 = 35{,}09$$
$$IT_2 = 376{,}95 \qquad CT_2 = 212 \qquad B_2 = 164{,}9$$

para el segundo. La suma de los beneficios en los dos submercados es:

$$B_1 + B_2 = 301{,}5 + 164{,}9 = 466{,}9$$

Estableciendo las elasticidades respectivas, y prescindiendo ya del signo:

$$E_1 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = 0{,}3\frac{51{,}95}{9{,}5} = 1{,}6$$

$$E_2 = 0{,}7\frac{35{,}09}{10{,}5} = 2{,}33$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{E_1}\right)}$$

Si, por reducción al absurdo $E_1 = E_2$, entonces $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$, o lo que es lo mismo, $p_1 = p_2$, y no se puede dar discriminación; es decir, si las elasticidades son iguales no es posible discriminar; o dicho de otro modo, las diferentes elasticidades son una precondición para hacerlo. Si, por el contrario, $E_1 \neq E_2$ el precio será *menor* en el mercado cuya demanda sea *más* elástica en valor absoluto. En efecto:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - \frac{1}{E_2}}{1 - \frac{1}{E_1}} \qquad p_1 > p_2 \qquad \text{si}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_2}\right) > \left(1 - \frac{1}{E_1}\right)$$

Lo que sucederá si, en valor absoluto, E_1 es menor que E_2. En efecto, en:

$$p_1\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{E_2}\right)$$

y si:

$$|E_1| < |E_2| \qquad \text{entonces}$$

$$\left(1 - \frac{1}{E_1}\right) < \left(1 - \frac{1}{E_2}\right) \qquad \text{o} \qquad I_{m1} < I_{m2}$$

y para que I_{m1} sea igual a I_{m2}, p_1 debe ser mayor que p_2.

Apliquemos esta teoría a los datos del problema. Debe apreciarse que las funciones inversas de demanda son:

$$p_1 = 83{,}3 - 3{,}3x_1$$

$$p_2 = 50 - 1{,}42x_2$$

y la directa e inversa de mercado total es:

$$x = 60 - p \qquad p = 60 - x$$

El coste marginal, constante, es 20. Como monopolista puro la empresa obtenía:

$$IT_M = px = (60 - x)x = 60x - x^2$$
$$I_m = 60 - 2x = C_m = 20$$
$$x = 20$$
$$p = 40$$
$$B = px - CT = 800 - 402 = 398$$

Como discriminador, y por el mismo método:

$$IT_1 = p_1x_1 = (83{,}3 - 3{,}3x_1)x_1 = 83{,}3x_1 - 3{,}3x_1^2$$
$$I_{m1} = 83{,}3 - 6{,}6x_1 = C_m = 20$$
$$x_1 = 9{,}5$$
$$p_1 = 83{,}3 - 3{,}3 \cdot 9{,}5 = 51{,}95$$
$$IT_1 = 493{,}5 \qquad CT_1 = 192$$
$$B_1 = 301{,}5$$

para el primer submercado. Y para el segundo:

$$IT_2 = p_2x_2 = (50 - 1{,}42x_2)x_2 = 50x_2 - 1{,}42x_2^2$$
$$I_{m2} = 50 - 2{,}84x_2 = 20 = C_m$$
$$x_2 = 10{,}5$$
$$p_2 = 35{,}09$$
$$IT_2 = 376{,}95 \qquad CT_2 = 212 \qquad B_2 = 164{,}9$$

para el segundo. La suma de los beneficios en los dos submercados es:

$$B_1 + B_2 = 301{,}5 + 164{,}9 = 466{,}9$$

Estableciendo las elasticidades respectivas, y prescindiendo ya del signo:

$$E_1 = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = 0{,}3\frac{51{,}95}{9{,}5} = 1{,}6$$

$$E_2 = 0{,}7\frac{35{,}09}{10{,}5} = 2{,}33$$

se aprecia que se dan las condiciones para discriminar (distintas las dos elasticidades) y como $p_1 > p_2$, se cumple $E_1 < E_2$.

Otra manera de resolver el problema sería plantear:

$$\text{máx } B = IT_1 + IT_2 - CT(x_1 + x_2)$$

que implica:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = I_{m1} - C_m = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = I_{m2} - C_m = 0$$

y resolver un sistema de ecuaciones, ambas en x (x_1 y x_2 respectivamente en este caso [11]). Después de hallar las dos x bastaría sustituir en sus respectivas funciones de demanda, hallar los precios respectivos y las elasticidades correspondientes del mismo modo que en el caso anterior.

EJERCICIO 5.11.

Una empresa monopolista cuya función de costes variables es $CV = x^2 + 6x$ trabaja en un sector o mercado en el que la demanda está segmentada formalmente (el precio es único e independiente de la influencia de los consumidores) en dos grupos con las siguientes funciones de demanda parcial: $x_1^d = 50 - 2p$ y $x_2^d = 50 - \left(\frac{1}{2}\right)p$. Obtener el precio, cantidad intercambiada y elasticidad de la demanda en el equilibrio.

El problema es similar al anterior con la única especificidad de que existen dos funciones de demanda. Pero ello es trivial por que basta sumarlas sin más en este caso. Después será necesario hacer $I_m = C_m$ y las dos restantes condiciones ($I'_m < C_m$, y $p \geq$ mín CMV). Pero no conocemos I o IT; aunque lo podemos construir. En efecto, sobre las funciones de demanda parcial:

Como se trata de un monopolista con precio único, basta con obtener la demanda total:

$$x_1^d = 50 - 2p$$
$$x_1^d = 50 - 0{,}5p$$

como el *bien es homogéneo:*

[11] Porque el coste marginal es constante; si la función de coste totales fuese más compleja, por ejemplo, del tipo $ax^2 + bx + c$, con a, b y c, parámetros, ambas ecuaciones serían funciones tanto de x_1 como de x_2.

$$x^d = x_1^d + x_2^d = 100 - 2{,}5p$$
$$2{,}5p = 100 - x$$

despejando p:

$$p = \frac{100}{2{,}5} - \frac{1}{2{,}5}x$$
$$p = 40 - 0{,}4x$$

Será necesario hacer $I_m = C_m$ y las dos restantes condiciones ($I_m < C_m$, y $p \geq$ mín CMV):

$$I = px = (40 - 0{,}4x)x = 40x - 0{,}4x^2$$
$$I_m = 40 - 0{,}8x$$
$$I'_m = -0{,}8 < 0$$

Por su parte el C_m es:

$$CV = x^2 + 6x$$
$$C_m = 2x + 6 \qquad C'_m = 2 > I'_m$$

igualando ingreso marginal y coste marginal:

$$2x + 6 = 40 - 0{,}8x$$
$$x = \left(\frac{34}{2{,}8}\right) = 12{,}14$$

sustituyendo en p:

$$p = 40 - 0{,}4 \cdot 12{,}14 = 35{,}14 > \text{mín } CMV$$
$$CMV(12{,}14) = x + 6 = 12{,}14 + 6 = 18{,}14$$

Por último, la elasticidad de la demanda en el equilibrio se calcula al modo habitual ya conocido:

$$E = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x} = (-)\left(-\frac{1}{\frac{dp}{dx}}\frac{p}{x}\right) = 2{,}5 \cdot 2{,}89 = 7{,}23 > 1$$

Debe recordarse que el monopolista maximizador del beneficio siempre debe situarse en el tramo elástico $E > 1$, de la curva de demanda).

EJERCICIO 5.12.

La función de costes de un monopolista es $C = 2x^2 - 5x + 3$. Las funciones de demanda de su producto en dos mercados son: $p_1 = 8 - 5x_1$, $p_2 = 7 - 2x_2$, $(x_1, x_2) \geq 0$. Determinar el ouput de maximización del beneficio en cada uno de los dos submercados y el nivel de beneficios.

Las funciones de ingresos totales en los dos submercado son:

$$IT_1 = p_1x_1 = (8 - 5x_1)x_1 = 8x_1 - 5x_1^2$$

$$IT_2 = p_2x_2 = (7 - 2x_2)x_2 = 7x_2 - 2x_2^2$$

Y la función de costes $C = 2x^2 - 5x + 3$ según el enunciado; como $x = x_1 + x_2$:

$$C = 2(x_1 + x_2)^2 - 5(x_1 + x_2) + 3 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 - 5x_2 + 3$$

La función de beneficio es, por tanto:

$$B = 8x_1 - 5x_1^2 + 7x_2 - 2x_2^2 - 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 + 5x_1 + 5x_2 - 3 =$$
$$= 13x_1 - 7x_1^2 + 12x_2 - 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 3$$

Y la maximización del beneficio implica hacer las primeras derivadas respecto a los outputs respectivos iguales a cero:

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = 13 - 14x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = 12 - 8x_2 - 4x_1 = 0$$

Reordenando se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$14x_1 + 4x_2 = 13$$

$$4x_1 + 8x_2 = 12$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando la segunda:

$$24x_1 = 14 \qquad x_1 = \frac{7}{12} \qquad \text{de donde} \qquad x_2 = \frac{29}{24}$$

Para estos outputs el nivel de beneficios, sin más que sustituir, es: 8,04.

Valoraciones sociales y privadas

EJERCICIO 5.13.

Muestre que si la elasticidad de la demanda pasa de 2 a 1,5, la divergencia entre las valoraciones sociales y privadas crece.

En competencia, $p = C_m = I_m$, en monopolio $p \neq C_m = I_m$. Pero $p_M = \left(\dfrac{E}{E-1}\right)I_m$, y como $\left(\dfrac{E}{E-1}\right) > 0$, ya que $|E| > 1$, si E aumenta desde un valor 1,5, a 2, por ejemplo, el paréntesis es decreciente:

$$\text{Si} \quad E = 1{,}5 \qquad \frac{E}{E-1} = \frac{1{,}5}{1{,}5-1} = 3$$

$$\text{Si} \quad E = 2 \qquad \frac{E}{E-1} = 2$$

$$\text{Si} \quad E = 3 \qquad \frac{E}{E-1} = 1{,}5$$

pero el paréntesis es lo que diferencia ambas valoraciones. Luego si decrece E crece la diferencia.

Monopsonio

EJERCICIO 5.14.

Una empresa monopsonista (monopolista de demanda) se enfrenta a una curva de oferta de trabajo $L = w - 50$; con ese factor y según la función de producción, $x = 10L^2 + 20$ produce un bien que vende en un mercado perfectamente competitivo al precio paramétripco, $p = 5$. Establezca la cantidad producida, el salario, y el beneficio de equilibrio.

El beneficio es:

$$B = px - wL = p(10L^2 + 20) - (L + 50)L = 49L^2 - 50L + 100$$

sin más que despejar w en la función de oferta de trabajo y sustituir la en la función de beneficio. Maximizando ahora B respecto a la cantidad de trabajo:

$$\frac{\partial B}{\partial L} = 98L - 50 = 0 \qquad L = 0{,}51$$

por tanto:

$$w = L + 50 = 50{,}51$$

siendo el coste:

$$C = wL = 50{,}51 \cdot 0{,}51 = 25{,}77$$

el volumen de output:

$$x = 10L^2 + 20 = 10(0{,}51)^2 + 20 = 22{,}60$$

los ingresos:

$$I = px = 5 \cdot 22{,}60 = 113$$

y los beneficios:

$$B = 113 - 25{,}77 = 87{,}23$$

El monopolio demandando factores de producción

EJERCICIO 5.15.

Una empresa monopolista utiliza dos factores según una función de producción Cobb-Douglas del tipo $x = 20L^{1/2}K^{1/2}$, siendo la función de demanda a la que se enfrenta $x = 1.000 - 2p$. Si el volumen de capital es de 1.600 y el salario es de 1.000 en sus unidades respectivas, hallar la cantidad de trabajadores empleada y el volumen de output de máximo beneficio.

Dados los datos del problema podemos despejar la función de demanda inversa:

$$x = 1.000 - 2p \qquad p = \frac{1.000}{2} - \frac{x}{2}$$

y de la función de producción obtenemos la productividad marginal y con ella el ingreso del producto marginal, cual corresponde a un monopolio:

$$x = 20L^{1/2}K^{1/2} \qquad P_{mL} = 10L^{-1/2}K^{1/2} \qquad IP_m = P_{mL}I_m = w$$

Por otro lado el ingreso total y en consecuencia el ingreso marginal son sencillos de lograr:

$$IT = px = \left(\frac{1.000}{2} - \frac{x}{2}\right)x = 500x - \frac{x^2}{2} \qquad I_m = 500 - x$$

Por lo que igualando el ingreso del producto marginal al precio del factor:

$$IP_m = P_{mL}I_m = 10L^{-1/2}K^{1/2}\,(500 - x) = w = 1.000$$

Sustituyendo K por su valor en el enunciado:

$$IP_m = 10L^{-1/2}(1.600)^{1/2}\,(500 - x) = w = 1.000$$

También la función de producción:

$$x = 10L^{1/2}(1.600)^{1/2} = 400L^{1/2}$$

Sistema de dos ecuaciones que permite conseguir las dos variables solicitadas, L y x.

$$L^{-1/2} = \frac{400}{x}$$

que sustituido en la ecuación del ingreso del producto marginal permite obtener:

$$x = 987{,}65 \quad \text{y} \quad L = 6{,}09$$

EJERCICIO 5.16.

En un monopolio con una función de demanda como $x^d = \frac{50}{p}$ y una de costes como $C = 2x^2$, el precio de equilibrio será:

Sin más que aplicar la fórmula de Amoroso a los datos bien conocida e igularla al coste marginal: el $IT = px = p\left(\frac{50}{p}\right) = 50$, por lo que el marginal es cero. Aunque $C_m = 4x$, $I_m = Cm \Rightarrow x = 0$, por lo que $p = \infty$.

CAPÍTULO 6

Oligopolio y competencia monopolística: duopolios; empresa líder, demanda quebrada, juegos de Nash y precios que previenen la entrada

Duopolio de Cournot

EJERCICIO 6.1.

Si en un mercado existen dos empresas duopolistas cuyas funciones de costes son $CT_1 = 310x_1 + 20$ y $CT_2 = 400x_2 + 25$, analice el equilibrio de Cournot con relación a precios, cantidades y beneficios, si la demanda de mercado es $p = 2.000 - x$.

Dada la teoría es obvio que en este contexto que:

$$x = x_1 + x_2$$

por lo que la función de demanda es:

$$p = 2.000 - x = 2.000 - (x_1 + x_2)$$

La función de beneficio, del primer duopolista, por su parte, es:

$$B_1 = px_1 - CT_1 = [2.000 - (x_1 + x_2)]x_1 - CT_1 =$$

$$= 2.000x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - 310x_1 - 20 = -x_1^2 + 1.690x_1 - x_1x_2 - 20$$

Para maximizar el beneficio es preciso hacer:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 1.690 - \left(x_2 + x_1\frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

Y para el segundo duopolista:

$$\frac{\partial B}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - \left(x_1 + x_2\frac{dx_1}{dx_2}\right) = 0$$

En el modelo de Cournot suponemos que las variaciones conjetuales son nulas:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_1}{dx_2} = 0$$

por lo que se simplifican las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_2} = -2x_1 + 1.690 - x_2 = 0 \qquad \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - x_1 = 0$$

$$2x_1 = 1.690 - x_2 \qquad x_1 = \frac{1.690 - x_2}{2}$$

y análogamente:

$$x_2 = \frac{1.600 - x_1}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que establece la dependencia de las dos empresas, se obtienen las cantidades de equilibrio:

$$x_1 = 593{,}3 \qquad x_2 = 503{,}3$$
$$x = x_1 + x_2 = 1.096{,}6$$

el precio:

$$p = 903{,}4$$

y los beneficios de cada una de las dos empresas:

$$B_1 = 352.044{,}22 \qquad B_2 = 253.336{,}22$$

Duopolio de Stackelberg

EJERCICIO 6.2.

Si en un mercado existen dos empresas duopolistas cuyas funciones de costes son $CT_1 = 310x_1 + 29$ y $CT_2 = 400x_2 + 25$, analice el equilibrio de Stackelberg con relación a precios, cantidades y beneficios, si la demanda de mercado es $p = 2.000 - x$ y la empresa 1 se comporta como líder y ia 2 como seguidor.

En el equilibrio correspondiente a Stackelberg, suponer que la empresa 1 actúa como líder y la 2 como seguidor implica que la empresa 2 actúa según su función de reacción, mientras que la líder toma como variación conjetural la curva de reacción de la empresa 2.

En el ejercicio 1 obtuvimos la curva de reacción de la empresa 2:

$$x_2 = \frac{1.600 - x_1}{2}$$

por lo que el beneficio que debe maximizar la empresa 1 es:

$$B_1 = \left[2.000 - \left(x_1 + \frac{1.600 - x_1}{2}\right)\right]x_1 - 310x_1 - 20 = 890x_1 - \frac{x_1^2}{2} - 20$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = 890 - x_1 = 0$$

por lo que $x_1 = 890$ y, por tanto, $x_2 = 355$.

El precio es:

$$p = 755$$

y los beneficios de cada una de las empresas:

$$B_1 = 396.030 \qquad B_2 = 126.000$$

EJERCICIO 6.3.

Si en un mercado existen dos empresas duopolistas cuyas funciones de costes son $CT_1 = 310x_1 + 20$ y $CT_2 = 400x_2 + 25$, analice el equilibrio de Stackelberg con relación a precios, cantidades y beneficios, si la demanda de mercado es $p = 2.000 - x$.

El planteamiento es similar también al del ejercicio anterior, salvo que en las ecuaciones:

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 1.690 - \left(x_2 + x_1\frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x_2} = -2x_2 + 1.600 - \left(x_1 + x_2\frac{dx_1}{dx_2}\right) = 0$$

la hipótesis de Stackelberg puede implicar que las variaciones conjeturales sean, por ejemplo:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{2}$$

De donde, sustituyendo y operando:

$$-2x_1 + 1.690 - \left[\left(\frac{1.600 - x_1}{2}\right) + x_1\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$-2x_2 + 1.600 - \left[\frac{1}{2}x_2 + \left(\frac{1.690 - x_2}{2}\right)\right] = 0$$

$$-2x_2 + 755 = 0 \qquad -2x_1 + 890 = 0$$

$$x_1 = 445 \qquad x_2 = 377{,}5$$

cantidades de equilibrio, por lo que la cantidad total será:

$$x = x_1 + x_2 = 822{,}5$$

y el precio de mercado:

$$p = 2.000 - x = 1.177{,}5$$

Por último, los beneficios correspondientes son:

$$B_1 \approx 524.210 - 137.970 = 386.240$$

$$B_2 \approx 444.106 - 150.825 = 293.281$$

EJERCICIO 6.4.

En una estructura de mercado oligopolista (dos empresas sin pérdida de generalidad) cuyas funciones de costes respectivas son: $CT_1 = \left(\frac{x_1^2}{10}\right) + 6x_1 + 3$, $CT_2 = 9x_2^2 + 4x_2 + 5$, siendo la función de demanda, $x = 150 - 0{,}5p$; discuta si las empresas tienen incentivo a formar un cártel, y cuales serían los acuerdos probables y sus variantes.

Las empresas están produciendo en la situación inicial tratando de hacer máximo su beneficio. Pero, en este caso, existe interdependencia:

$$x_1 + x_2 = x$$

de modo que, para lograr sus objetivos tendrán que hacer iguales sus respectivos ingresos marginales y costes marginales, en este caso:

$$C_{m1} = 0{,}2x_1 + 6$$
$$IT_1 = p \cdot x_1 = [300 - 2(x_1 + x_2)]x_1 = 300x_1 - 2x_1^2 - 2x_2x_1$$
$$I_{m1} = 300 - 4x_1 - 2x_2$$

Por lo que:

$$0{,}2x_1 + 6 = 300 - 4x_1 - 2x_2$$
$$4{,}2x_1 = 294 - 2x_2$$

y en el caso de la segunda:

$$C_{m2} = 18x_2 + 4$$
$$IT_2 = p \cdot x_2 = [300 - 2(x_1 + x_2)]x_2 = 300x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$
$$I_{m2} = 300 - 2x_1 - 4x_2$$
$$18x_2 + 4 = 300 - 2x_1 - 4x_2$$

El anterior es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$2{,}1x_1 = 147 - x_2 \qquad 11x_2 = 148 - x_1$$

de donde:

$$x_1 = 66{,}47 \qquad x_2 = 7{,}41 \qquad p = 300 - 2 \cdot 73{,}88 = 152{,}24$$

por lo que los beneficicos son:

$$B_1 = 10.119{,}39 - 843{,}64 = 9.275{,}75$$
$$B_2 = 1.128{,}09 - 528{,}81 = 599{,}28$$
$$B = B_1 + B_2 = 9.875{,}04$$

2. Si deciden actuar como monopolistas, es decir como un cártel, deberá cumplirse:

$$I_m = C_m$$

fácilmente obtenible de:

$$IT = px = (300 - 2x)x = 300x - 2x^2 \qquad I_m = 300 - 4x$$

Por su parte, el coste marginal total es la suma de los costes marginales individuales (pero la suma horizontal, es decir, sumar las cantidades para cada coste marginal):

$$C_{m1} = 0{,}2x_1 + 6$$
$$C_{m2} = 18x_2 + 4$$
$$0{,}2x_1 = C_{m1} - 6$$
$$x_1 = \frac{Cm_1}{0{,}2} - \frac{6}{0{,}2} \qquad x_2 = \frac{Cm_2}{18} - \frac{4}{18}$$

de donde:

$$C_m = \frac{x + 30{,}02}{5{,}05}$$

$$\frac{x + 30{,}02}{5{,}05} = 1.515 - 20{,}2 \qquad 21{,}2x = 1.484 \qquad x = 70{,}4$$

La producción se la reparten los dos oligopolistas igualando los costes marginales individuales al coste marginal global, que para un volumen de output de 70,04 unidades es igual a 19,81:

$$C_{m1} = 0{,}2x_1 + 6 = C_m(70{,}4) = 19{,}81$$
$$x_1 = 69{,}05$$
$$C_{m2} = 18x_2 + 4 = 19{,}81 \qquad x_2 = 0{,}87$$
$$B_1 = 250{,}8 \cdot 69 - 593{,}1 = 17.305{,}2$$
$$B_2 = 250{,}8 \cdot 0{,}87 - 18 = 232{,}8$$
$$B = 17.538$$

muy superior al de lucha entre los competidores, luego tienen incentivo a la coalición y el cartel.

Empresa líder

EJERCICIO 6.5.

Sea un mercado en el que la función de demanda es $x = 50 - 0{,}25p$ que es atendido por un grupo de empresas pequeñas cuya función de oferta es $x_c = 0{,}15p$ junto a una empresa líder cuyo coste total es $CT_L = 0{,}5x_L^2 + 10x_L + 200$. Hallar la cantidad lanzada al mercado por el líder, y el precio de mercado.

La demanda del líder es la difererencia entre la demanda total y la oferta de las pequeñas:

$$x_L = 50 - 0{,}25p - 0{,}15p = 50 - 0{,}40p$$

actuando sobre la misma como monopolista, es decir igualando el ingreso marginal al coste marginal.

$$p_L = \frac{50}{0{,}4} - \frac{x_L}{0{,}4} = 125 - 0{,}25x_L$$

$$IT_L = (125 - 0{,}25x_L)x_L$$

$$I_{mL} = 125 - 5x_L \qquad Cm_L = x_L + 10$$

de donde:

$$I_{mL} = Cm_L = 125 - 5x_L = x_L + 10 \qquad 6x_L = 115$$

$$x_L = 19{,}17 \qquad p_L = 125 - 2{,}5(19{,}17) = 77{,}07$$

El output total la industria que abastece el mercado $x = 50 - 0{,}25(77{,}07) = 30{,}73$, del que las empresas pequeñas ofrecen $x_c = 0{,}15 \cdot 77{,}07 = 11{,}56$.

Curva de demanda quebrada

EJERCICIO 6.6.

Una empresa oligopolista se enfrenta a una curva de demanda decreciente y quebrada en dos tramos cuyas elasticidades son respectivamente 4 y 2 en valor absoluto; si su curva de costes a largo plazo es $C = 0{,}2x^2 - 24x$ calcular el margen de variación de los costes marginales si el precio y la cantidad producida inicialmente son de 50 y 10 unidades respectivamente, la posibilidad de alterar en la demanda sin cambio en las elasticidades, así como sus implicaciones para la cantidad producida.

Como debe cumplirse en cada tramo de la demanda que:

$$I_m = p\left(1 - \frac{1}{E}\right)$$

está claro que:

$$I_{m1} = 50\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 37{,}5$$

$$I_{m2} = 50\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25$$

Los costes marginales son:

$$C_m = 0{,}4x - 24$$

que para un output de 10 unidades es 28. Luego el tramo de discontinuidad de los ingresos marginales es de 12,5, y el margen de variación de los costes marginales será potencialmente de 3 unidades a la baja y 9,5 al alza. Es evidente, por otro lado, que la demanda puede variar sin alteración de las elasticidades en los dos tramos; en este caso lo que sí variará es el volumen de output. El límite del mismo será cuando:

$$C_m = 37{,}5$$

que es el límite superior de los mismos, o lo que es igual, igualando los costes marginales a dicho límite:

$$C_m = 0{,}04\,x + 24 = 37{,}5$$

de donde:

$$x = 33{,}75 \text{ unidades}$$

Competencia monopolística: equilibrio a largo

EJERCICIO 6.7.

Suponga un grupo de empresas en un mercado de competencia monopolística, en el que el grupo tiende al equilibrio y las empresas se ajustan proporcionalmente; la empresa típica tiene una función de costes como $C = 0{,}15x^2 + 35x$ y hace frente a una curva inversa de demanda, $p = 100 - 0{,}5x$. Hallar el equilibrio a largo plazo y la elasticidad de la demanda en dicho equilibrio.

El equilibrio, solución de tangencia, se da en la intersección de las curvas de demanda y de costes medios a largo plazo. De modo que, sin más que calcular los costes medios e igualar:

$$CML = \frac{C}{x} = \frac{0{,}15x^2 + 35x}{x} = 0{,}15x + 35$$

$$CML = p = 0{,}15x + 35 = 100 - 0{,}5x$$

de donde:

$$x = 100 \qquad p = 50$$

Sabemos que se debe cumplir que:

$$I_mL = C_mL$$

por lo que:

$$C_mL(100) = 0{,}30x + 35 = 0{,}30 \cdot 100 + 35 = 65$$

$$C_mL = I_mL = p\left(1 - \frac{1}{E}\right) = 50\left(1 - \frac{1}{E}\right) = 65$$

de donde, la elasticidad es: $E = -3{,}33$.

Competencia monopolística: número de empresas

EJERCICIO 6.8.

Una empresa perteneciente a un mercado de competencia monopolística cuya función de costes es $C = 0{,}06x^3 - x^2 + 25x$, se enfrenta a una función inversa de demanda lineal como $p = a - 0{,}15x$; obtener el equilibrio a largo plazo de la empresa y el parámetro a que depende número de empresas del mercado.

La solución de tangencia implica la igualación de las pendientes de la curva de demanda y de los costes medios a largo; la de la demanda es:

$$\frac{dp}{dx} = -0{,}15$$

Calculando primero los *CML*, al modo habitual:

$$CML = 0{,}06x^2 - x + 25$$

y derivando respecto de x, para obtener la pendiente:

$$\frac{dCML}{dx} = 0{,}12x - 1$$

Igualando:

$$-0{,}15 = 0{,}12x - 1 \qquad 0{,}85 = 0{,}12x \qquad x = 7{,}08$$

El precio de equilibrio se obtiene estableciendo los *CML* para un output igual a 7. En este caso:

$$CML(7) = 0{,}06 \cdot 49 - 7 + 25 = 20{,}94 = p$$

El parámetro a ligado al tamaño del mercado, que no ha intervenido hasta ahora, es obvio que está implícito en la ecuación de demanda:

$$p = a - 0{,}15x = a - 0{,}15 \cdot 7 = 20{,}94$$

de donde:

$$a = 21{,}99 \approx 22$$

EJERCICIO 6.9.

Suponga dos empresas oligopolísticas con costes marginales nulos que se enfrentan a una curva de demanda de mercado como $x = a - bp$. Obtenga un equilibrio de Nash.

Si la curva, es decir digamos una recta, de demanda es la habitual función lineal, utilizada en otros ejemplos, $x = a - bp$, ya sabemos que se representa gráficamente con puntos extremos que implican:

$$\text{Si} \quad p = 0 \qquad x = a$$

$$\text{Si} \quad x = 0 \qquad a - bp = 0 \qquad a = bp \qquad p = \frac{a}{b}$$

Sabemos también que los oligopolistas maximizan el beneficio cuando el ingreso marginal es igual al coste marginal; o lo que es lo mismo, cuando el ingreso total es máximo, o el marginal igual a cero. O lo que es igual, cuando E, la elasticidad de la demanda es igual a 1 en valor absoluto. Aquí:

$$I = px = p(a - bp)$$

$$E = -\frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = -(-b)\frac{p}{a - bp} = 1$$

$$bp = a - bp$$

$$2bp = a \qquad p = \frac{a}{2b}$$

$$x = a - bp = a - b\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{a}{2}$$

Pero supongamos que la segunda empresa supone que la primera mantendrá su producción en $x_1 = \frac{a}{2}$, y que reaccionará cualquier bajada de precio de la segunda. La segunda empresa maximiza su beneficio para $x = \frac{a}{4}$, al precio p_1. La primera rebaja el precio a p_1 y mantiene el output en $x_1 = \frac{a}{2}$, si supone que la segunda va a mantener su output. Está claro que las ecuaciones de reacción de las dos empresas, en este caso son:

$$x_1 = \frac{1}{2}(a - x_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(a - x_1)$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}a - \frac{a}{4} = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{4a - 2a}{8} = \frac{2a}{8} = \frac{1}{4}a$$

$$x_1^1 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{4}a\right) = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{8a - 2a}{16} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2}a = \frac{3}{8}a$$

El equilibrio de maximización del beneficio es tal, que simultáneamente se establezca un vector de outputs (x_1, x_2), que haga cumplir simultáneamente el sistema anterior.

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[a - \frac{1}{2}(a - x_1)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(a + x_1)$$

$$\frac{3}{4}x_1 = \frac{1}{4}a \qquad x_1 = \left(\frac{a}{3}\right)$$

Por analogía, $x_2 = \left(\frac{a}{3}\right)$. Por lo que:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 2\frac{a}{3}$$

$$p = a - bx = a - b\frac{2a}{3} = \frac{a}{3}(3 - 2b)$$

y ninguna de las dos empresas tiene incentivo a cambiar su volumen de output.

Barreras a la entrada

EJERCICIO 6.10.

Comente la siguiente proposición: «Si los costes medios de todas las empresas, tanto las instaladas como las potenciales entrantes fuesen iguales y constantes, ¿aún así pueden los oligopolistas instalados establecer barreras a la entrada?».

Si los precios fueran superiores a los costes medios ($p > CM$) ello implicaría beneficios extraordinarios positivos y cualquier empresa podrá entrar en el sector para cualquier volumen de output, si todas las empresas son iguales en costes como en la hipótesis del enunciado. Luego de aquí se infiere que el precio límite que previene la entrada, p_L, que deberían imponer las instaladas sería el que fuera igual a los costes medios, aun a consta de que los beneficios fueran nulos incluso para ellas.

Oligopolio: repaso de varios conceptos

EJERCICIO 6.11.

Si en un modelo de Cournot hay *n* empresas iguales la elasticidad de la demanda será.

$$I_m = p\left(1 - \frac{1}{nE}\right) \qquad \text{como} \qquad C_m > 0$$

(y también lo es por definición):

$$\left(1 - \frac{1}{nE}\right) > 0$$

lo que implica que

$$1 > \frac{1}{nE}$$

por lo que

$$nE > 1 \quad \text{y} \quad E > \frac{1}{n}$$

EJERCICIO 6.12.

Una determinada empresa extrae pirita de la que se obtienen como metales secundarios oro y plata en proporciones fijas (tres partes de plata por una de oro). Las demandas de estos dos metales son distintas y responden a las funciones $p_{AU} = 200 - 0{,}05x_{AU}$ y $p_{AG} = 120 - 0{,}1x_{AG}$ para el oro y la plata respectivamente. El coste de extracción y separación de los metales es conjunto y responde a la función de costes totales $C = 350 + 5x + 0{,}05x^2$. El precio por unidad de masa de cada producto que hace máximo el beneficio es:

a) $p_{AU} = 190{,}2$; $p_{AG} = 60{,}9$
b) $p_{AU} = 200$; $p_{AG} = 120{,}9$
c) $p_{AU} = 200$; $p_{AG} = 600{,}5$
d) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTA: (a) Obtenemos las curvas de ingreso marginal derivando las de ingreso de cada producto:

$$I_{AU} = p_{AU}x_{AU} = 200x_{AU} - 0{,}05x_{AU}^2$$
$$I_{mAU} = 200 - 0{,}1x_{AU}$$

y

$$I_{AG} = p_{AG}x_{AG} = 120x_{AG} - 0{,}1x_{AG}^2$$
$$I_{mAG} = 120 - 0{,}2x_{AG}$$

Sumadas verticalmente:

$$I_m = (200 - 0{,}1x_{AU}) + (120 - 0{,}2x_{AG}) = 320 - 0{,}3x$$

La curva de costes marginales se obtiene derivando de la expresión de costes totales, de manera que se obtiene:

$$C_m = 5 + 0{,}1x$$

Para maximizar el beneficio tendremos que igualar coste e ingreso marginal:

$$320 - 0{,}3x = 5 + 0{,}1x$$
$$x = 787{,}5$$

Dado que tres cuartas partes serán de plata:

$$x_{AG} = 590{,}6 \qquad x_{AU} = 196{,}9$$

los precios son:

$$p_{AU} = 200 - 0{,}05 \cdot 196{,}9 = 190{,}2$$
$$p_{AG} = 120 - 0{,}1 \cdot 590{,}6 = 60{,}9$$

EJERCICIO 6.13.

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0{,}01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0{,}01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0{,}005x^2$. ¿Cuál es el precio de transferencia y la producción que hacen máximo el beneficio de la empresa en su conjunto?:

a) $p_T = 52{,}5;\ x = 4.750$
b) $p_T = 52{,}5;\ x = 200$
c) $p_T = 0;\ x = 4.750$
d) $p_T = 0;\ x = 200$

RESPUESTA: (a) El ingreso marginal neto de la división distribuidora (el ingreso marginal de la empresa menos el coste marginal de la división) de debe igualar el coste marginal de la división productora:

$$ImN_B = Im_G - Cm_B$$
$$Cm_A = Cm_G - Cm_B$$

Despejando en la segunda Cma_B y sustituyendo en la primera:

$$ImN_B = Im_G - Cm_G + Cm_A$$

Dado que $Ima_G = Cma_G$ para la producción que hace máximo el beneficio, tendremos:

$$ImN_B = Cm_A$$

Que determina el precio de transferencia y la cantidad óptima que se produce.

Tenemos:

$$ING_G = px = 200x - 0{,}01x^2$$
$$Im_G = 200 - 0{,}02x$$
$$Cm_G = 10 + 0{,}02x$$
$$Cm_B = 5 + 0{,}01x$$
$$Cm_A = Cm_G - Cm_B = 10 + 0{,}02x - (5 + 0{,}01x) = 5 + 0{,}01x$$
$$ImN_B = Im_G - Cm_B = 200 - 0{,}02x - (5 + 0{,}01x) = 195 - 0{,}03x$$
$$ImN_B = Cm_A \qquad \text{implica que:}$$
$$195 - 0{,}03x = 5 + 0{,}01x$$
$$190 = 0{,}04x$$
$$x = 4.750$$

Que es la misma solución que habríamos obtenido haciendo $Im_G = Cm_G$.

El precio de transferencia (p_T) se igualará al coste marginal de la división A (ya que p_T será su curva de ingreso marginal) y será el coste marginal de la división B. En efecto:

$$C_{mA} = C_{mG} - C_{mB} = 5 + 0{,}01 \cdot 4.750 = 52{,}5 \text{ u.m.}$$

EJERCICIO 6.14.

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0{,}01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0{,}01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0{,}005x^2$. El beneficio total es:

a) 190.000
b) 4.750
c) 30.000
d) 450.750

RESPUESTA: (d) Las dos divisiones hacen máximo su beneficio. La división A igual a $Cma_A = p_T = Ima_A$, lo que asegura la maximización del beneficio de esta división. La división B hace máximo su beneficio con $ImN_B (= Cm_A) = Cm_B (= C_{mG} - C_{mA})$:

$$195 - 0{,}03x = 10 + 0{,}02x - (5 + 0{,}01x)$$
$$190 = 0{,}04x$$

lo que se verifica para $x = 4.750$ u.m.

$$B = px - C$$

$$p = 200 - 0{,}01x = 152{,}5 \text{ uu.cc.}$$

$$px = 724.375$$

$$C = 500 + 10x + 0{,}01x^2 = 273.625$$

$$B = 724.375 - 273.625 = 450.750$$

EJERCICIO 6.15.

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0{,}01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0{,}01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0{,}005x^2$. Considerando la posibilidad de comprar el producto en cuestión en un mercado externo, perfectamente competitivo, al precio de 25 u.m. ¿Cuál será la producción?

a) 250
b) 1.500
c) 2.000
d) 30

RESPUESTA: (c) El precio de 25 u.m. será ahora la curva de ingreso marginal de la división A, de manera que ésta hará máximo su beneficio para:

$$Cm_A = 5 + 0{,}01x = 25$$

$$x = 2.000$$

EJERCICIO 6.16.

Una empresa tiene dos divisiones, una de ellas produce un determinado bien y la otra lo distribuye. Inicialmente supondremos que no existe un mercado externo para ese bien. La función de demanda del producto por unidad de tiempo es $p = 200 - 0{,}01x$ y la función de costes total $C = 500 + 10x + 0{,}01x^2$. La división de distribución tiene una función de costes específica de $C_B = 250 + 5x + 0{,}005x^2$. Considerando la posibilidad de comprar el producto en cuestión en un mercado externo, perfectamente competitivo, al precio de 25 u.m. ¿Cuál será el beneficio conjunto?

a) 190.000
b) 4.700
c) 30.000
d) 450.750

RESPUESTA: (d).

El precio de 25 u.m. será ahora la curva de ingreso marginal de la división A, de manera que ésta hará máximo su beneficio para:

$$Cm_A = 5 + 0{,}01x = 25$$
$$x = 2.000$$

La compañía deseará distribuir la misma cantidad que antes, deducida a partir de la igualación Im_G (= 200 − 0,02x) = Cm_G (= 10 + 0,02x). La división B deseará, pues, comprar y distribuir ese número de unidades, de manera que la diferencia (2.750 unidades) la obtendrá del mercado al precio de 25 unidades monetarias. El beneficio permanecerá igual porque lo que una división (B) ahorra la otra (A) deja de ingresarlo. En efecto B ahorra:

$$xp - xp_T = 4.750 \cdot 52{,}5 - 4.725 \cdot 25 = 130.625 \text{ uu.cc}$$

y A deja de ingresar precisamente lo mismo.

CAPÍTULO 7

Teorías manageriales, *mark-up*, localización, publicidad, externalidades y recursos no renovables

Ingresos por ventas: Baumol

EJERCICIO 7.1.

Suponga una empresa que maximiza sus ingresos por ventas, cuya función de costes es $CT = 2x^2 + 10x + 100$, donde se incluyen los gastos en publicidad. Si la función de demanda a la que hace frente es $p = 1.998 - 3x$. Hállese el equilibrio del mismo, si la restricción de beneficio es 10.000 uu.cc.

Partiendo del planteamiento teórico conocido, los ingresos son ahora:

$$IV = px = (1.998 - 3x)x = 1.998x - 3x^2$$

y los marginales:

$$\frac{\partial IV}{\partial x} = 1.998 - 6x = 0$$

por lo que:

$$1.998 = 6x \qquad x = 333$$

y sustituyendo en la función de demanda:

$$p = 999$$

por que los beneficios son para ese volumen de output:

$$B = I - C = 332.667 - 225.208 = 107.459$$

Si la empresa fuera una tradicional maximizadora del beneficio:

$$B = (1.998 - 3x)x - (2x^2 + 10x + 100) = 1.998x - 3x^2 - 2x^2 - 10x - 100 =$$
$$= 1.998x - 5x^2 - 10x - 100$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 1.998 - 10x - 10 = 0$$

$$x = 198{,}8 \qquad p = 1.401{,}6$$

$$B = 278.638{,}08 - 81.130{,}88 = 197.507{,}2$$

Maximización producción-beneficios

EJERCICIO 7.2.

Una empresa tiene un objetivo mixto producción-beneficios, $M = 0{,}2B + 0{,}8x$. Su función de costes es $C = x^2 + 100x + 5$ y la función de demanda de mercado a la que se enfrenta es $x = 200 - p$. Hallar el equilibrio de la empresa.

Aplicando la teoría ya conocida:

$$B = px - C = (200 - x)x - (x^2 + 100x + 5) =$$
$$= 200x - x^2 - x^2 - 100x - 5 = -2x^2 + 100x - 5$$

Operando:

$$M = 0{,}2(-2x^2 + 100x - 5) + 0{,}8x$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0{,}2(-4x + 100) + 0{,}8 = 0$$

$$x = \left(\frac{20{,}8}{0{,}8}\right) = 26$$

Sustituyendo en:

$$p = 200 - x = 200 - 26 = 174$$

$$I = px = 4.524 \qquad C = 3.281 \qquad B = 1.243$$

Mark-up o full-cost

EJERCICIO 7.3.

Comente la siguiente proposición: si la elasticidad de la demanda a la que se enfrenta una empresa es 5, en valor absoluto, podrá fijar un 25% como margen de beneficio, sobre los costes medios variables.

De las fórmulas del texto teórico es fácil apreciar que:

$$(1 + h) = 1 + \frac{25}{100} = 1 + 0{,}25 = \left(\frac{E}{E-1}\right) = \left(\frac{5}{5-1}\right) = \left(\frac{5}{4}\right) = 1{,}25$$

de donde, $E = 5$. Luego la proposición es cierta, en algún sentido.

Localización espacial

EJERCICIO 7.4.

Suponga que queremos localizar (construir) un hotel en la isla de Stromboli (en cuyo centro existe un volcán) y en la que la única forma operativa de pasar de un punto de la costa a otro es a través de la playa o por barco. Como se trata de una isla turística donde –suponemos– que los turistas están distribuidos uniformemente en la costa, pero hay pocas atracciones, equidistantes entre ellas, si el perímetro de la isla es de 20 kilómetros, hay cuatro amenidades, el coste del transporte (una lancha) es de 4 unidades monetarias (euros) por kilómetro, hay 200 turistas que quieren divertirse en una de ellas al día, el coste fijo de las mismas es de 100 euros por temporada, y el coste de cada entrada es de 5 euros ¿Cuál es el coste medio total de una sesión de diversión para cada turista?

Lo primero es calcular el coste medio por diversión, lo que nos permite determinar el precio de la misma en cada amenidad. Los costes por sesión (costes medios) son $CM = \left(\frac{100}{50}\right) + 5 = 7$ unidades monetarias, dado que cada amenidad servirá a una cuarta parte de los turistas. Pero éstos deberán afrontar además los costes de desplazamiento. El turista que se aloje allí donde hay una amenidad no tiene que afrontar ningún coste adicional, pero el peor de los casos posibles es aquel en que el turista está justo entre dos amenidades, eso es, a 2,5 kilómetros de cualquiera de ellos. La distancia media será por tanto de $\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ kilómetros. Dado un precio de 4 unidades monetarias por kilómetro el coste medio de un desplazamiento será de 5 unidades monetarias para la ida, y 5 para la vuelta, lo que hace un total de 10, que unidas a las 7 del coste de la sesión hacen que cada visita a la amenidad salga por 17 euros.

EJERCICIO 7.5.

Con los datos del ejercico anterior ¿Cuál es el número óptimo de amenidades?:

El número óptimo de amenidades dependerá de los costes de transporte: si éstos son cero el número óptimo es una sola de ellas, pero si los costes son positivos, en nuestro caso 4, un mayor número de establecimientos ayudará a reducir los costes totales (incluido transporte) de cada visita a las mismas. Una posibilidad es repetir los cálculos para un número superior o inferior de establecimientos, y ver qué ocurre con los costes totales de una opción. Otra posibilidad, más directa es aplicar la fórmula $N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$, donde z es el coste por kilómetro de los desplazamientos (4), L es el número de clientes uniformemente distribuidos (200) y C es el coste fijo que debe afrontar cada restaurante para poder operar a cualquier nivel de actividad (100). Introduciendo los datos del problema obtenemos que $N^* = 2$, lo que obviamente quiere decir que reduciéndose el número de amenidades el coste total de la amenidad se reducirá.

EJERCICIO 7.6.

DENU Airlines se pregunta por el número de aviones que deben cubrir el trayecto Madrid-Tenerife. Suponemos que hay 24 personas (= *L*) que desean viajar cada día a la isla afortunada, y cada una de ellas prefiere salir a una hora distinta. El coste que para cada una de ellas supone esperar una hora es igual a 10 euros (= *z*) y el coste fijo de poner en marcha al avión es de 30 euros (= *CF*). ¿Cuántos vuelos deben salir al día?:

Aplicando la fórmula $N^* = \sqrt{\frac{zL}{2C}}$ (véase texto teórico) obtenemos $N^* = 2$, es decir, la cantidad óptima de vuelos es de dos al día equidistantes, es decir, uno a las 12 de la noche y otro a las 12 del mediodía, o uno a las 6 de la mañana y otro a las 6 de la tarde, etc.

EJERCICIO 7.7.

Si la compañía DENU Airlines explota en solitario un trayecto fleta cuatro aviones al día, cada avión le cuesta 32 euros, llenando en los cuatro las 128 plazas que tienen, y sabe que los pasajeros tienen preferencias distintas pero equidistribuidas ¿cómo valoran éstos el tiempo que pierden esperando en el aeropuerto?:

Aplicando la fórmula $N^* = \sqrt{\dfrac{zL}{2C}}$ obtenemos $z = 2$, es decir, cada pasajero valora cada hora perdida (si medimos los horarios con esa unidad) esperando, en 2 euros. Tenemos que $L = 512$ $(= 128 \cdot 4)$, $CF = 32$ y $N^* = 4$, pues suponemos que la compañía está programando el número de vuelos óptimo.

EJERCICIO 7.8.

Si una determinada empresa que vende en solitario galletas integrales para el desayuno tiene cuatro tipos distintos *equidistantes* (equivalentes en preferencias) que vende a consumidores de preferencias equidistribuidas a lo largo de una circunferencia de posibilidades ¿Cuántas y qué tipo de variedades tendría que introducir una competidora para disputarle la mitad del mercado?:

La diferenciación de productos es una forma de barrera a la entrada (Schmalensee, 1978). Si se introducen las mismas variedades se iría a una guerra de precios. Sólo si se introducen el mismo número de variedades, pero intermedias, se puede disputar la mitad de ese mercado fragmentado por la diferenciación.

Publicidad

EJERCICIO 7.9.

Una empresa sabe que, hasta cierto punto, los gastos en publicidad le reportan mayores ventas. La función que las relaciona es $x = 100 + 50A - 0{,}75A^2$, donde x son las ventas y A el gasto en publicidad. El gasto en publicidad es de 30 unidades monetarias y el producto se vende a 2 unidades monetarias la unidad. Los costes variables (CV) por unidad de producto son constantes e iguales a 0,75 unidades monetarias. Los costes fijos (CF) suponen 150 unidades monetarias, a los que se suman los gastos en publicidad ya mencionados ¿cuáles serán los beneficios?:

Los beneficios dependerán de la diferencia entre ingresos y costes, variables y fijos.

$$B = px - (A + CF) - xCV$$

$$B = 1.850 - (30 + 150) - 925 \cdot 0{,}75 = 976{,}25 \text{ u.m.}$$

EJERCICIO 7.10.

Una empresa tiene una función de demanda tal que $x = 125 - 5p$, y una función de costes (excluida la publicidad) tal que $C = 75 + 5x + 0{,}01x^2$, la elasticidad de la demanda respecto de la publicidad es de 2, y el presupuesto publicitario (A) es de 250 unidades monetarias. ¿El precio será?

La función de ingresos será:

$$px = 25x - \frac{x^2}{5}$$

El ingreso marginal es por tanto:

$$I_m = 25 - \frac{2x}{5}$$

El coste marginal será:

$$C_m = 5 + 0{,}02x$$

El beneficio se hace máximo igualando ambos, de manera que:

$$25 - \frac{2x}{5} = 5 + 0{,}02x$$

de donde:

$$x = 47{,}6$$

y dada la función de demanda:

$$p = 25 - \frac{47{,}6}{5} = 15{,}4 \text{ u.m.}$$

EJERCICIO 7.11.

Con los datos del ejercicio anterior ¿cúal es el beneficio?

Si el beneficio se hace máximo igualando ingreso marginal a coste marginal:

$$25 - \frac{2x}{5} = 5 + 0{,}02x$$

entonces:

$$x = 47{,}6$$

y dada la función de demanda

$$p = 25 - \frac{47{,}6}{5} = 15{,}4 \text{ u.m.}$$

El beneficio sería:

$$B = px - C - A$$
$$B = 733{,}0 - 335{,}6 - 250 = 147{,}3 \text{ u.m.}$$

EJERCICIO 7.12.

Con los datos del ejercicio anterior ¿cuáles serían los efectos en los beneficios de un incremento del 5% en el presupuesto de publicidad?:

Dada la elasticidad de la demanda respecto del gasto en publicidad:

$$\left[\frac{\left(\dfrac{\partial x}{x}\right)}{\left(\dfrac{\partial x}{A}\right)}\right] = 2$$

un aumento del 5% de dicho gasto elevará el número de unidades vendidas en un 10%, esto es, de aproximadamente 47,6 a 52,36 unidades. El impacto en la función de beneficios será:

$$B = 52{,}36(15{,}4) - [75 + 5(52{,}36) + 0{,}01(52{,}36)^2] - 262{,}5 =$$
$$= 806{,}34 - (75 + 261{,}8 + 27{,}41) - 262{,}5 = 179{,}63$$

EJERCICIO 7.13.

Una industria petrolífera que actúa en un mercado de competencia perfecta se enfrenta una función de demanda de mercado $p = 450 - 2x$, con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Cuál es la producción de la empresa y el precio del producto si se tienen en cuenta los efectos de la contaminación?:

De la función de costes de contaminación derivamos los costes marginales de la empresa $Cm = x$. El coste marginal social será por tanto $CmS = 30 + 3x(= p)$, que igualado a la función de demanda nos da el resultado:

$$I = 450x - 2x^2 \qquad I_m = 450 - 4x = 30 + 3x = C_m \qquad 7x = 420 \qquad x = 60$$

EJERCICIO 7.14.

Una industria química competitiva hace frente a una función de demanda como $p = 450 - 2x$ con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Cuál es la producción de la empresa y el precio del producto si *no* se tienen en cuenta los efectos de la contaminación?:

$$I_m = 450 - 4x = 30 + 2x = C_m \qquad 6x = 420 \qquad x = 70$$

EJERCICIO 7.15.

La función de costes de los vertidos de latas de aluminio es $C = \frac{1}{8}v^2 + 50$ si los costes de reciclar son $CR = 1.200 \ln v - 20v$ y la función de costes sociales de los vertidos es $CS = v^2 + 350$ si se deja en manos del mercado la decisión de cuanto sea el reciclado ¿cuál sería el volumen de vertidos socialmente deseable?:

Obteniendo los costes marginales correpondientes e igualando:

$$CS = v^2 + 350 \qquad CmS = 2v$$

$$CR = 1.200 \ln v - 20v \qquad CmR = \frac{1.200}{v} - 20$$

$$CmS = CmR \qquad \frac{1.200}{v} - 20 = 2v$$

$$2v^2 + 20v - 1.200 = 0$$

que es una ecuación cuadrática cuya solución es

$$v = 20$$

Reciclado: costes sociales y privados

EJERCICIO 7.16.

Con los datos del ejercio anterior si se deja en manos del mercado la decisión de cuanto sea el reciclado ¿cuál sería el precio a pagar por el envase (E_{nv}) para que la cantidad de vertidos privada fuese igual que la cantidad de vertidos socialmente deseable?

En el ejercicio anterior obtuvimos un resultado para $v = 20$, por lo que:

$$\frac{1.200}{v} - 20 = 40 \qquad Cm = \frac{1}{4}v = 5 \qquad Cm + E = 40 \qquad E_{nv} = 35$$

EJERCICIO 7.17.

Dada una función de oferta de aluminio reciclado $S^r = -8 + p$ y una función de oferta de aluminio $S^a = -2 + p$, si la función de demanda es $x = 20 - p$. ¿Cuál sería el precio de equilibrio si el mercado se suministra indistintamente con aluminio reciclado o no?:

$$S = S^r + S^a = (-8 + p) + (-2 + p) = -10 + 2p$$

$$S = D \qquad -10 + 2p = 20 - p \qquad p = 10$$

2. ¿Cuáles serían las respectivas cantidades de oferta de aluminio y de aluminio reciclado?:

Una vez conocido el precio se pueden calcular los valores numéricos de las ofertas:

$$S^r = -8 + 10 = 2 \qquad S^a = -2 + 10 = 8$$

EJERCICIO 7.18.

Un mercado de competencia está formado por 15 empresas, cada una de las cuales opera con una función de oferta de abonos $x = \frac{(-3 + p)}{5}$. La contaminación es tal que su coste marginal es $CmC = \frac{x}{6}$. Si la función de demanda de mercado es ¿cuál es la cantidad intercambiada en el mercado si las empresas no tienen en cuenta los costes de la contaminación que producen?:

La oferta conjunta es:

$$15\left[\frac{(-3 + p)}{5}\right] = \left[\frac{(-45 + 15p)}{5}\right] = -9 + 3p$$

Igualando la oferta a la demanda:

$$x^s = s^d \qquad -9 + 3p = 27 - p \qquad 4p = 36$$

$$p = 9 \qquad x = 18$$

EJERCICIO 7.19.

Con los datos del ejercio anterior ¿cuáles son el precio y la cantidad si los empresarios tienen en cuenta el coste de contaminar?:

Con oferta total $x = -9 + 3p$:

$$p = \frac{x + 9}{3} + CmC = \frac{x + 9}{3} + \frac{x}{6} = -6 + 2p = 27 - p \qquad 3p = 33 \qquad p = 11$$

De donde:

$$p = \frac{x + 6}{2} \qquad x = -6 + 2p = 16$$

EJERCICIO 7.20.

Si disponemos de una bodega con vinos de crianza cuya calidad crece el primer año a una tasa del 10%, del 9,5% el segundo año, del 9% el tercero y así sucesivamente; con un tipo de interés del 4% ¿Cuándo será conveniente poner a la venta los vinos?

En el duodécimo año, porque entonces se iguala el tipo de interés y la tasa de crecimiento. El momento ideal para la venta es cuando la calidad crece a la misma velocidad que el tipo de interés, porque entonces da igual vender el vino e ingresar el dinero en un banco que dejar que siga mejorando. Sin embargo ello no es cierto antes de dicha igualdad, ni tampoco después.

EJERCICIO 7.21.

Supongamos que disponemos de una mina de carbón, que el coste de extracción es de 10 euros por tonelada, que el tipo de interés es del 5% y que el precio del presente año es de 15 euros por tonelada. Si la explotación de la mina es sostenida en el tiempo ¿qué precio deberá tener el carbón el próximo año?:

La regla de Hotelling establece que si el carbón debe explotarse todos los años se cumplirá que

$$p_{1+1} = p_t + i(p_t - c)$$

donde i es el tipo de interés, c es el coste de extracción por tonelada y p_{1+1} y p_t los precios en dos años sucesivos. Sustituyendo se obtiene 15,25.

EJERCICIO 7.22.

Supongamos que disponemos de una mina de carbón, que el coste de extracción es de 10 euros por tonelada, pero descendiendo en un 10% cada año, que el tipo de interés es del 5% y que el precio del presente año es de 15 euros por tonelada. Si la explotación de la mina es sostenida en el tiempo ¿qué precio deberá tener el carbón el próximo año?:

La *regla de Hotelling* sería en este caso:

$$p_{t+1} = p_t + i(p_t - c_t) + (c_{t+1} - c_t)$$

es decir:

$$p_{t+1} = 15 + 0{,}05(15 - 10) + (9 - 10) = 14{,}25$$

EJERCICIO 7.23.

Si la explotación de una mina es sostenida en el tiempo y los costes de extracción aumentan, dado un tipo de interés constante, el precio del recurso ¿aumenta necesariamente?

Aumenta necesariamente porque según la *regla de Hotelling* en este caso:

$$p_{t+1} = p_t + i(p_t - c_t) + (c_{t+1} - c_t)$$

y

$$c_{t+1} > c_t \qquad \text{por tanto} \qquad c_{t+1} - c_t > 0$$

y el precio del recurso debe aumentar cada año necesariamente.

Repaso de varios conceptos

EJERCICIO 7.24.

Los economistas neoclásicos afirman que establecer un margen de beneficio sobre el coste (fijar los precios por *mark-up*) es equivalente a estimar la elasticidad de la demanda, y luego aplicar el análisis marginalista ¿ello es verdadero o falso? ¿Por qué?:

Para las funciones de costes de *mark-up* los costes marginales y medios coinciden por lo que aplicando la conocida fórmula del ingreso marginal, e igualándola a los costes:

$$I_m = p\left(1 - \frac{1}{|E|}\right) = C_m = CMV$$

operando ahora en el paréntesis:

$$CMV = p\left(1 - \frac{1}{|E|}\right) = p\left(\frac{|E| - 1}{|E|}\right)$$

y despejando p, se obtiene:

$$p = CMV\left(\frac{|E|}{|E| - 1}\right)$$

Pero como E debe ser $|E| > 1$, el paréntesis es mayor que la unidad. Ahora bien llamando $(1 + h)$ al paréntesis anterior:

$$\left(\frac{|E|}{|E| - 1}\right) = 1 + h$$

$h > 0$ puede ser el margen bruto de beneficio (el *MBB* de *mark-up*); por lo que:

$$p = CMV(1 + h) = CMV\left(\frac{|E|}{|E| - 1}\right)$$

y en efecto se cumple la proposición que es verdadero.

EJERCICIO 7.25.

Bajo *mark-up* los márgenes (márgenes brutos de beneficio) para determinados volúmenes de producción ¿Pueden dar lugar a pérdidas?

La respuesta es sí, porque si *MNB* es menor que $\frac{CF}{x_{mu}}$.

$$B = I - C = px_{mu} - CT \qquad \text{como} \qquad p = (CMV + MBB) \qquad \text{se tendrá}$$

$$[CMV + MBB]x_{mu} - CT = B \qquad \text{y como} \qquad CT = CV + CF = CMVx_{mu} + CF \qquad \text{se tendrá}$$

$$CMVx_{mu} + MNBx_{mu} - CMVx_{mu} - CF = MNBx_{mu} - CF$$

y $B > 0$, si y sólo si *MNB* es mayor que $\frac{CF}{x_{mu}}$, es decir, si el margen de beneficios es superior a los costes medios fijos para el volumen de producción o ventas.

EJERCICIO 7.26.

En el modelo de empresa que maximiza el volumen de ingresos por ventas, en el equilibrio se cumple qué ¿$I_m < C_m$?

Así es, porque es

$$\frac{dIV}{dx} = C_m\left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)$$

y el paréntesis es mayor que la unidad.

CAPÍTULO 8

Microeconomía del Sector Público

Bienes públicos y estimación de la demanda[12]

EJERCICIO 8.1.

Supongamos dos consumidores de un bien público cuyas funciones de demanda sean $x_1 = 100 - 2p$ y $x_2 = 200 - 4p$, respectivamente. Si el Sector Público desea que los consumidores revelen sus preferencias por el bien público ¿cuál será la estimación de la demanda global de dicho bien?

La suma de las demandas es ahora vertical (los dos precios para las diversas cantidades) como se sabe por la teoría. En este caso las funciones inversas de demanda son:

$$2p = 100 - x_1 \qquad p = \frac{100 - x_1}{2} = 50 - \frac{x}{2}$$

$$4p = 200 - x_2 \qquad p = \frac{200 - x_2}{4} = 50 - \frac{x}{4}$$

$$p = p_1 + p_2 = 100 - \frac{3}{4}x$$

Al ser un bien público se puede prescindir de los subíndices (es el mismo bien) y como es una línea recta tomando los valores extremos:

[12] Un bien público es uno en el que el disfrute por parte de un agente no disminuye el de los demás agentes, a diferencia de los privados tradicionales.

$$\text{Si} \quad x = 0 \qquad\qquad p = 100$$

$$\text{Si} \quad p = 0 \qquad\qquad x = 133{,}3$$

Bienes púlicos: provisión óptima

EJERCICIO 8.2.

Con los datos del ejercicio anterior, si los costes correspondientes a la producción del bien público son *CT* = x^2 + 10, hállese la provisión óptima de dicho bien.

Sabemos que ello implica hacer $p = C_m$, por lo que:

$$C_m = 2x = p = 100 - \frac{3}{4}x$$

De donde:

$$x_1 = x_2 = \frac{400}{11} = 36{,}36 \text{ unidades}$$

Carga del impuesto

EJERCICIO 8.3.

Si la elasticidad de la función de oferta de mercado es |1,5|, la de la demanda es |1| y el volumen de un impuesto es de 20 unidades. ¿Cuál será la parte de dicho impuesto soportada por los consumidores?:

Por el teorema de Dalton se cumple que:

$$\frac{E^s}{E^d} = \frac{t^d}{t^s} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5$$

$$t^d = 1{,}5t^s$$

y sabemos que:

$$t = t^d + t^s = 20 = 1{,}5t^s + t^s = 2{,}5t^s \qquad\qquad t^s = 8$$

por lo que

$$t^d = 1{,}5 \cdot 8 = 12$$

EJERCICIO 8.4.

En un mercado cuya función de demanda es $x^d = 32 - \frac{4}{3}p$ y la de oferta $x^s = -3 + p$ si el gobierno establece un impuesto por unidad vendida de 7 unidades de cuenta ¿qué parte del mismo soportan el consumidor y las empresas respectivamente?:

Antes del impuesto el equilibrio era:

$$x^d = 32 - \frac{4}{3}p = -3 + p = x^s \qquad 105 = 7p \qquad p = 15 \qquad x = 12$$

La función de oferta, $x^s = -3 + p$, implica que $p = x + 3$, que con el impuesto será:

$$p = x + 3 + 7$$

$$x^s = -10 + p \qquad \text{y ahora} \qquad x^s = x^d$$

$$x^s = -10 + p = 32 - \frac{4}{3}p = x^d$$

$$p = 18 \qquad x = 8$$

Luego el consumidor soporta $18 - 15 = 3$ unidades y el productor el resto, es decir, 4 unidades. Para $x = 8$, la oferta inicial implicaría $p = 11$, luego $15 - 11 = 4$.

Competencia perfecta e impuestos

EJERCICIO 8.5.

En competencia perfecta con una curva de demanda normal y una oferta hipotética de pendiente negativa (ambas lineales), pero suponiendo que la pendiente de la curva de oferta sea mayor que la de demanda en valor absoluto, una variación en la demanda como consecuencia de un impuesto *t* hace que ¿Δp sea mayor o menor que *t*?

Es mayor por mera inspección y al tener la curva de oferta pendiente negativa y mayor que la de demanda.

Monopolio e impuestos

EJERCICIO 8.6.

Un monopolista trabaja con una demanda con elasticidad constante igual $|5|$ y el gobierno establece un impuesto de t euros por unidad producida ¿el precio aumentará en?

$$p = \frac{C_m + t}{1 - \dfrac{1}{E}} = \frac{C_m + t}{\dfrac{4}{5}} = 5\frac{C_m + t}{4}$$

$$\frac{dp}{dt} = 1{,}25$$

$$dp = 1{,}25dt$$

Luego lo hará 1,25 veces el aumento del impuesto.

EJERCICIO 8.7.

Con curvas de demanda de mercado decrecientes, y curvas de costes marginales de elasticidad infinita en monopolio, si se establece un impuesto de cuantía fija sobre las ventas, ¿t es siempre mayor o menor que Δp?

Siempre es menor porque el Δp es menor que t que se calcula sobre la curva de demanda y ésta es decreciente.

Traslación de impuestos en competencia y monopolio

EJERCICIO 8.8.

Si se cumple que $\Sigma C_m^c = C_m^M$ y la curva de *oferta* C_m tiene pendiente positiva, con un impuesto t ¿el aumento de precio ($t > 0$) será menor que t, al modo de la competencia perfecta?

Ciertamene sí por mera inspección visual y los supuestos habituales.

EJERCICIO 8.9.

Un monopolista trabaja con una demanda lineal $p = a - bx$ y el gobierno establece un impuesto t (10 unidades de cuenta) por unidad producida: ¿en cuanto aumenta el precio y como se lo reparten en su caso los agentes, consumidores y empresas?

$$p = a - bx \qquad IT = (a - bx)x = ax - bx^2 \qquad I_m = a - 2bx$$

$$I_m = C_m + t \qquad x = \frac{(a - C_m - t)}{2b}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{1}{2b}\right) \qquad \frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = (-b)\left(-\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{2}$$

Es decir, la mitad del aumento del impuesto. Luego los dos tipos de agentes se lo reparten por mitad.

EJERCICIO 8.10.

El Ministerio de Hacienda grava a un mercado de competencia perfecta cuya función de demanda de mercado es $x^d = 300 - 6p$ y que está formado por 100 empresas idénticas con funciones de costes del tipo $CT = 25x^2 + 18x + 20$, con un impuesto de 6 unidades de cuenta (euros) por unidad vendida. ¿Cuál es el porcentaje (si alguno) que trasladan las empresas a los consumidores?

Los costes marginales de las empresas son:

$$Cm_i = 50x_i + 18$$

Por lo que igualándolos al precio (genérico ahora por lo que se añade sin más):

$$50x_i + 18 = p$$

se obtiene la función de oferta de la empresa representativa, es decir, una relación únivoca entre precio y cantidad lanzada al mercado:

$$p - 18 = 50x_i$$

por lo que lo que lanza una es:

$$x_i = \frac{p - 18}{50}$$

La fórmula anterior, es lo que lanza una empresa al mercado, por lo que lo que ofrecen el conjunto de ellas es:

$$x^s = \sum_{i=1}^{100} x_i = 100\left(\frac{p - 18}{50}\right) = 2p - 36$$

Como la demanda de mercado es:

$$x^d = 300 - 6p$$

el precio de equilibrio se obtiene de la condición de equilibrio:

$$x^d = x^s = 300 - 6p = 2p - 36$$
$$336 = 8p$$
$$p = 42$$

y la cantidad, sin más que sustituir:

$$x = 48$$

Al recoger el impuesto, la función de costes modificada es:

$$CT = 25x^2 + 18x + 20 + 6x = 25x^2 + 24x + 20$$

(donde debe notarse que se han añadido seis unidades de cuenta por unidad vendida, es decir, $6x$) de donde, por el mismo procedimiento:

$$x^s = \sum_{i=1}^{100} x_i = 100\left(\frac{p - 24}{50}\right) = 2p - 48$$
$$x^d = x^s = x = 300 - 6p = 2p - 48$$
$$8p = 348 \qquad p = 43{,}5$$

El consumidor paga por tanto 43,5 unidades de cuenta y antes pagaba 42. El consumidor paga 1,5 más que antes, y el productor recibe 37,5, es decir, 4,5 es su contribución al impuesto. Las dos contribuciones suman 6, es decir, la recaudación unitaria. Por tanto, la aportación del consumidor supone un 25% del impuesto, y ella es la parte trasladada.

Evaluación de proyectos: coste-beneficio

EJERCICIO 8.11.

Suponga un proyecto de inversión pública cuyos costes acumulados a lo largo de todo el proyecto sean de 1.000 millones de unidades de cuenta. Y suponga que los rendimientos durante dos años son 100 y 400 millones de las mismas unidades de cuenta respectivamente. Si el tipo de interés de mercado es del 10%. ¿Deberá llevarse a cabo el proyecto, según la regla del *VPDN* (valor presente neto descontado) del análisis coste-beneficio?

La respuesta es no. En efecto:

$$VPND = \left[\frac{100}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2}\right] - 1.000 = \left[\frac{100}{1{,}1} + \frac{400}{1{,}21}\right] - 1.000 =$$

$$= 99 + 330 - 1.000 = -429 \text{ millones de uu.cc.}$$

el *VPND* es negativo, luego no se llevará a cabo el proyecto.

EJERCICIO 8.12.

Evalúe el mismo proyecto del problema anterior según la regla de la *TIR*.

Aplicando las fórmulas relevantes:

$$\left[\frac{100}{1+r} + \frac{400}{(1+r)^2}\right] - 1.000 = 0$$

Obviamente se obtendría un *TIR* negativo (−50%) que sería inferior al del mercado.

Medio ambiente, polución e impuestos

EJERCICIO 8.13.

Una industria química competitiva afronta una función de demanda $p = 450 - 2x$, con una función de costes $C = 30x + x^2$. La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Qué impuesto fijo

por unidad de producto habría que establecer para que el resultado fuera equivalente al de internalizar los costes de la contaminación?

El resultado si se internalizan los costes de la contaminación es un precio de 282 euros por unidad de producto y una producción de 84 unidades y si no se internalizan un precio de 240 euros por unidad de producto y una producción de 105 unidades. Igualamos la función de coste marginal con el impuesto incluido a la de demanda ($30 + 2x + t = 450 - 2x$) y sustituimos la producción óptima $x = 84$, de donde obtenemos el resultado.

EJERCICIO 8.14.

La actividad de esa industria tiene unos costes añadidos derivados de la polución iguales a $C_{pol} = \frac{x^2}{2}$. ¿Qué impuesto variable por unidad de producto habría que establecer para que el resultado fuera equivalente al de internalizar los costes de la contaminación?:

Se trataría de establecer un impuesto tal que la curva de costes marginales de la empresa se convierta en la curva de coste marginal social. Ésta es: $Cms = 30 + 3x$, mientras la de la empresa es $Cm = 30 + 2x$, por lo que hay que sumar un impuesto:

$$t(x) = x$$

Impuestos y oferta de trabajo

EJERCICIO 8.15.

Formalice algebraicamente el efecto Laffer y establezca bajo que condiciones opera dicho efecto. Suponga que el tipo impositivo es del 30%.

Obviamente el efecto depende de las elasticidad de la oferta; el salario w si existe un impuesto t, que el trabajador recibe realmente después de impuestos es:

$$w^* = w - tw = w(1 - t)$$

por lo que el consumidor oferente de trabajo reducirá su oferta ante el establecimiento del impuesto a partir de un punto, y para una demanda dada; con ello el volumen de trabajo intercambiado, y con ello los ingresos públicos derivados del impuesto sobre las rentas del trabajo descenderán. La función de ingresos públicos (fiscales, IF), se puede reformular como:

$$IF = F[w, w^*, t, s(L(w^*))] = tw^*s(w^*)$$

donde $s(w^*)$, es la oferta de trabajo, y el resto de las variables retienen sus significados habituales. Diferenciando respecto al impuesto, para analizar las variaciones que este produce en los ingresos públicos:

$$\frac{dIF}{dt} = \left[-t\frac{\partial s(w^*)}{\partial w^*}w + s(w^*)\right]w$$

ya que $\dfrac{\partial w^*}{\partial t} = -w^*$, es decir, para que se de el efecto Laffer, cuando crece t debe caer IF (el efecto se da en el tramo decreciente de la curva), o lo que es lo mismo, IF debe ser negativa. Pero para que sea negativa, se debe cumplir:

$$-t\frac{\partial s}{\partial w^*}w + s(w^*) < 0$$

o lo que es lo mismo:

$$t\frac{\partial s}{\partial w^*}w > s(w^*)$$

Dividiendo ahora por $ts(w^*)$:

$$\frac{t}{t}\frac{\partial s}{\partial w^*}\frac{w}{s(w^*)} > \frac{s(w^*)}{s(w^*)}\frac{1}{t}$$

y multiplicando por $(1 - t)$ y dado que $w^* = (1 - t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial w^*}\frac{w}{s} > \frac{1 - t}{t}$$

que es elasticidad de la oferta de trabajo. Es decir, solo se da el efecto Laffer si dicha elasticidad es mayor que:

$$\left(\frac{1 - t}{t}\right)$$

2. Si t es del 30%, tal como hemos supuesto en el enunciado:

$$\frac{1 - 0{,}3}{0{,}3} = 2{,}3$$

Es decir, que un aumento del 1% en el tipo impositivo sobre las rentas del trabajo, llevaría a *una reducción de la oferta de trabajo del 2,3%. Suponiendo que pueda ser reducido, que no lo* es por razones institucionales. Como mucho podría entenderse que el efecto giraría para aquellos casos de trabajos extra no reglados.

EJERCICIO 8.16.

¿Qué subsidio tendría que poner el gobierno para que un monopolio que establece un precio de *mark-up* igual a 20 y con $C_m = 10$, produzca el output socialmente conveniente (E y C_m constantes)?:

Para hacer $p = C_m$ deberá incentivar son un subsidio de 5 unidades. En efecto:

$$p = \frac{C_m}{\left(1 - \frac{1}{E}\right)} = C_m \frac{E}{E-1}$$

de donde:

$$20 = 10\frac{E}{E-1}$$

que implica:

$$\frac{E}{E-1} = 2 \quad \text{y} \quad E = 2$$

Con E y C_m constantes, llamando s al subsidio:

$$p = 2C_m$$

Entonces y como queda que socialmente interesa $p = C_m = 10$, se tendrá

$$10 = 2(10 - s)$$

de donde:

$$s = 5$$

CAPÍTULO 9

Equilibrio general de todos los mercados y bienestar social

Curva de contrato

EJERCICIO 9.1.

Considere un campo de prisioneros de guerra con dos individuos, y funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas como $u(1) = x_{11}^{1/3}x_{12}^{1/2}$, $u(2) = x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/3}$. Establezca la curva de contrato del intercambio.

Sabemos que deberá cumplirse:

$$RMS_1^2(1) = RMS_1^2(2)$$

y que:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2}$$

u_i denota la primera derivada respecto a los dos bienes ($i = 1,2$) en esta fórmula [13] y en este caso:

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} = \frac{u_{21}}{u_{22}}$$

[13] Debe apreciarse que en este capítulo u_1, por ejemplo, no significa la primera derivada de la función de utilidad, al modo del texto teórico (capítulo de demanda) sino la utilidad del primer agente. Y análogamente para el resto. El contexto será clarificador.

Por lo que:

$$u_{11} = \frac{1}{3}x_{11}^{-2/3}x_{12}^{1/2} \qquad u_{12} = \frac{1}{2}x_{12}^{-1/2}x_{11}^{1/3} \qquad u_{21} = \frac{1}{2}x_{21}^{-1/2}x_{22}^{1/3} \qquad u_{22} = \frac{1}{3}x_{22}^{-2/3}x_{21}^{1/2}$$

Dividiendo la primera por la segunda y la tercera por la cuarta:

$$\frac{\frac{1}{3}x_{11}^{-2/3}x_{12}^{1/2}}{\frac{1}{2}x_{12}^{-1/2}x_{11}^{1/3}} = \frac{\frac{1}{2}x_{21}^{-1/2}x_{22}^{1/3}}{\frac{1}{3}x_{22}^{-2/3}x_{21}^{1/2}}$$

$$\frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{3x_{22}}{2x_{21}}$$

$$4x_{21}x_{12} = 9x_{11}x_{22}$$

Que es la ecuación de la curva de contrato en este caso.

Condiciones de eficiencia

EJERCICIO 9.2.

Dada una economía cuyas preferencias aproximamos por una función de utilidad (social), $u = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ y cuyas funciones de producción son $x_2 = 10L_2 + 3$, $x_1 = 20L_1 + 5$, halle las condiciones de eficiencia del equilibrio general competitivo.

Tenemos que hallar la igualdad:

$$RMS_1^2 = RMT_1^2 = \frac{p_1}{p_2}$$

La relación marginal de sustitución es:

$$RMS_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}x_1^{1/2}} = \frac{x_2}{x_1}$$

Por su parte, la relación marginal de transformación es:

$$RMT_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Por lo que tomando el bien 1 como numérico:

$$p_1 = 1 \qquad p_2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 2x_2 = x_1$$

EJERCICIO 9.3.

Si en una economía la frontera de posibilidades de producción es $x_1 + x_2 = 50$ y la función de utilidad es $u = x_1^2 x_2^2$, ¿cuál será el precio relativo $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ de equilibrio general competitivo suponiendo que los bienes son sustitutivos perfectos?

Represeñtémosla gráficamente:

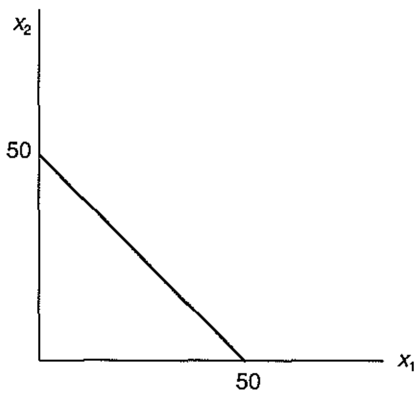

Figura 9.1

Operando:

$$1dx_1 + 1dx_2 = 0 \qquad -dx_2 = dx_1 \qquad RMT_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = 1$$

Por otro lado:

$$RMS_1^2 = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} \qquad RMS_1^2 = RMT_1^2 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1} = 1 \qquad \frac{p_1}{p_2} = 1$$

EJERCICIO 9.4.

Suponga una economía perfectamente competitiva de las llamadas 2 · 2, es decir, dos bienes dos factores, en ia que las funciones de producción respectivas para los dos bienes son $x_1 = K_1^{0,6}L_1^{0,4}$, $x_2 = K_2^{0,3}L_2^{0,7}$, y donde la función de utilidad de los dos agentes de consumo es $u = x_1^{0,5}x_2^{0,5}$, ambas del tipo Cobb-Douglas; si la dotación total de capital de la economía es 1.200 unidades, y la de trabajo 2.200 trabajadores, y el precio del bien 1 es 100, determinar: el precio del bien 2, el salario y la remuneración del capital.

Es bien conocido ya, que en los mercados de factores se deben cumplir las condiciones de valor del producto marginal igual al precio de los inputs:

$$VPM_{L1} = p_1Pm_{L1} = w \qquad VPM_{K1} = p_1Pm_{K1} = r$$
$$VPM_{L2} = p_2Pm_{L2} = w \qquad VPM_{K2} = p_2PM_{K2} = r$$

Al aplicar estas fórmulas a los datos del problema:

$$p_1Pm_{L1} = p_1 0{,}4L_1^{-0,6}K_1^{0,6} = w$$
$$p_2Pm_{L2} = p_2 0{,}7L_2^{-0,3}K_2^{0,3} = w$$

de donde:

$$\frac{0{,}4x_1p_1}{L_1} = \frac{0{,}7x_2p_2}{L_2}$$
$$0{,}4x_1L_2p_1 = 0{,}7x_2L_1p_2$$

Debe cumplirse también la igualdad de la relación marginal de sustitución en el consumo, al cociente invertido de los precios:

$$RMS_1^2 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{0{,}5x_1^{-0,5}x_2^{0,5}}{0{,}5x_1^{0,5}x_2^{-0,5}}$$

que, este caso, implica:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

donde, operando:

$$p_1x_1 = p_2x_2$$

$$0{,}4p_2x_2L_2 = 0{,}7p_2x_2L_1$$

Todas ellas son condiciones de eficiencia. Pero, como deben satisfacerse las condiciones de balance de la producción (dotaciones totales igual a usos totales):

$$L_1 + L_2 = L$$

$$K_1 + K_2 = K$$

entonces, sustituyendo:

$$L_1 + \frac{0{,}7}{0{,}4}L_1 = 2.200$$

$$L_1 = \frac{0{,}4L_2}{0{,}7} = 2.200 - L_2 = \frac{0{,}4L_2}{0{,}7} \qquad L_2 = 1.400 \qquad L_1 = 800$$

De igual modo para K:

$$VPM_{K1} = p_1Pm_{K1} = r = 0{,}6K_1^{-0{,}4}L_1^{0{,}4}p_1$$

$$VPM_{K2} = p_2Pm_{K2} = r = 0{,}3K_2^{-0{,}7}L_1^{0{,}7}p_1$$

o bien:

$$0{,}6K_2 = 0{,}3K_1$$

$$K_1 + K_2 = 1.200 \qquad K_1 = 1.200 - K_2$$

$$0{,}6K_2 = 0{,}3(1.200 - K_2) \qquad K_2 = 400 \qquad K_1 = 8$$

luego:

$$r = \frac{0{,}6L_1^{0{,}4}100}{K_1^{0{,}4}} = \frac{60L_1^{0{,}4}}{K_1^{0{,}4}} = \frac{60(800^{0{,}4})}{800^{0{,}4}} = 60$$

$$w = 0{,}4(100)L_1^{-0{,}6}K_1^{0{,}6} \qquad w = \frac{40K_1^{0{,}6}}{L_1^{0{,}6}} = 40$$

$$40 = 0{,}7p_2L_2^{-0{,}3}K_2^{0{,}3}$$

$$40 = \frac{0{,}7K_2^{0{,}3}p_2}{L_1^{0{,}6}}$$

$$p_2 = 83{,}21$$

o bien:

$$r = 0{,}3K_2^{-0{,}7}L_2^{0{,}7}p_2$$

$$60 = \frac{0{,}3L_2^{0{,}7}p_2}{K_2^{0{,}7}}$$

$$60K_2^{0{,}7} = 0{,}3L_2^{0{,}7}p_2$$

$$p_2 = \frac{60K_2^{0{,}7}}{0{,}3L_2^{0{,}7}} = \frac{60(400)^{0{,}7}}{0{,}3(1.400)^{0{,}7}} = 83{,}21$$

Equilibrio competitivo

EJERCICIO 9.5.

Dado un modelo de intercambio puro con dos bienes y dos agentes, cuyas funciones de utilidad vienen representadas por funciones de utilidad Cobb-Douglas del tipo $u(1) = x_{11}^{1/2}x_{12}^{1/2}$, $u(2) = x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$ y cuyas dotaciones de recursos son: $x_{11} = a$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = b$. Obtenga las funciones de demanda y los precios relativos de equilibrio, y demuestre el cumplimiento de las restricciones presupuestarias y la ley de Walras.

Formando la función auxiliar de Lagrange para el segundo agente:

$$S = x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2} - \lambda(p_1x_{21} + p_2x_{22} - p_2b)$$

las condiciones de primer orden son, como ya sabemos por ejercicios anteriores y en este caso de funciones de utilidad Cobb-Douglas:

$$\frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{p_1}{p_2}$$

de donde:

$$x_{22} = \frac{p_1}{p_2}x_{21}$$

$$x_{21} = \frac{p_2}{p_1}x_{22}$$

y como su recta de balance es:

$$p_2b = p_1x_{21} + p_2x_{22}$$

sustituyendo:

$$p_2 b = p_1 \frac{p_2}{p_1} x_{22} + p_2 x_{22} = 2p_2 x_{22}$$

$$x_{22} = \frac{p_2 b}{2p_2} = \frac{b}{2}$$

Y por el mismo procedimiento, para el primer bien y todavía el segundo agente :

$$p_2 b = \frac{p_1}{p_2} x_{21} p_2 + p_1 x_{21}$$

$$p_2 b = 2p_1 x_{21}$$

$$x_{21} = \frac{p_2 b}{2p_1} = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1}$$

Los excesos de demanda son:

$$z_{21} = x_{21} - \bar{x}_{21} = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1} - 0 = \frac{b}{2} \frac{p_2}{p_1}$$

$$z_{22} = x_{22} - \bar{x}_{22} = \frac{b}{2} - b = -\frac{b}{2}$$

Su restricción presupuestaria es:

$$p_1 z_{21} + p_2 z_{22} = \frac{b}{2} p_1 \frac{p_2}{p_1} - \frac{b}{2} p_2$$

$$\frac{b}{2} p_2 - \frac{b}{2} p_2 = 0$$

Para el primer agente, por otro lado, se cumple, por el mismo procedimiento:

$$p_2 x_{12} = p_1 x_{11}$$

$$x_{12} = \frac{p_1 x_{11}}{p_2} \qquad x_{11} = \frac{p_2 x_{12}}{p_1}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 \frac{p_1 x_{11}}{p_2} = 2p_1 x_{11}$$

$$x_{11} = \frac{p_1 a}{2p_1} = \frac{a}{2}$$

$$p_1 a = p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$$

$$p_1 a = p_1 \frac{p_2 x_{12}}{p_1} + p_2 x_{12} = 2p_2 x_{12}$$

$$x_{12} = \frac{p_1 a}{2p_2}$$

$$z_{11} = x_{11} - \bar{x}_{11} = \frac{a}{2} - a = \frac{a - 2a}{2} = -\frac{a}{2}$$

$$z_{12} = x_{12} - \bar{x}_{12} = \frac{p_1 a}{2p_2} - 0 = \frac{p_1 a}{2p_2} = \frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2}$$

Estableciendo la restricción presupuestaria de este agente:

$$p_1 z_{11} + p_2 z_{12} = 0$$

$$p_1\left(-\frac{a}{2}\right) + p_2 \frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2} = 0$$

$$-\frac{a}{2}p_1 + \frac{ap_1}{2} = 0$$

El equilibrio del mercado viene dado por la igualdad a cero de las sumas de los excesos de demanda de los dos agentes para cada bien:

$$z_{11} + z_{21} = 0$$

o

$$z_{12} + z_{22} = 0$$

Por lo que sin más que aplicar los resultados anteriores:

$$-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\frac{p_2}{p_1} = 0$$

$$\frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2} = 0$$

Por lo que precio relativo, en términos del bien uno, es:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{a}{2}\frac{2}{b} = \frac{a}{b}$$

o, alternativamente, con la segunda ecuación:

$$\frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2} = 0$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{b}{2}\frac{2}{a} = \frac{b}{a}$$

que, como sabemos, obtiene el mismo resultado. Por la ley de Walras, debe cumplirse:

$$p_1\left(-\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\frac{p_2}{p_1}\right) + p_2\left(\frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2} - \frac{b}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{a}{2}p_1 + \frac{b}{2}\frac{p_2}{p_1}p_1 + p_2\frac{a}{2}\frac{p_1}{p_2} - p_2\frac{b}{2} = 0$$

$$\frac{b}{2}p_2 - p_2\frac{b}{2} + \frac{a}{2}p_1 - \frac{a}{2}p_1 = 0$$

Las cantidades de equilibrio resultan:

$$x_{11} = \frac{a}{2}$$

$$x_{12} = \frac{p_1}{p_2}\frac{a}{2} = \frac{b}{a}\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$x_{22} = \frac{b}{2}$$

$$x_{21} = \frac{b}{2}\frac{p_2}{p_1} = \frac{b}{2}\frac{a}{b} = \frac{a}{2}$$

EJERCICIO 9.6.

Suponga una economía con dos agentes descritos por sus funciones de utilidad, $u(1) = x_{11}^{0,5}x_{12}^{0,5}$, $u(2) = x_{21}^{0,5}x_{22}^{0,5}$ y sus dotaciones de recursos $\bar{x}_{11} = 30$, $\bar{x}_{12} = 9$, $\bar{x}_{13} = 54$, $\bar{x}_{21} = 18$, $\bar{x}_{22} = 12$, $\bar{x}_{23} = 24$, donde $\bar{x}_{13}$, es *dinero*. Suponiendo que los consumidores demandan 1/3 de sus dotaciones de bienes como «dinero»: verificar la homogeneidad de las demandas de bienes y obtener el equilibrio general competitivo.

Analicemos el comportamiento del primer consumidor y el del otro se establecerá por analogía. Su problema, al modo habitual, se puede plantear como:

$$\text{máx} \quad u(1) = x_{11}^{1/2}x_{12}^{1/2}$$

$$\text{s.a.} \quad \frac{2}{3}(p_1\bar{x}_{11} + p_2\bar{x}_{12} + \bar{x}_{13}) = p_1x_{11} + p_2x_{12}$$

al tomar el tercer bien como numerario. Formulando la función auxiliar de Lagrange:

$$S = x_{11}^{1/2}x_{12}^{1/2} - \lambda(p_1x_{11} + p_2x_{12} - p_1\bar{x}_{11} - p_2\bar{x}_{12} - \bar{x}_{13})$$

las condiciones de primer orden son:

$$\left(\frac{1}{2}\right)x_{11}^{-1/2}x_{12}^{1/2} - \lambda p_1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)x_{12}^{-1/2}x_{11}^{1/2} - \lambda p_2 = 0$$

$$p_1x_{11} + p_2x_{12} - p_1\bar{x}_{11} - p_2\bar{x}_{12} - \bar{x}_{13} = 0$$

sistema que permite obtener las funciones de demanda al modo ya conocido por ejercicios anteriores:

$$\frac{x_{12}^{-1/2}x_{12}^{1/2}}{x_{11}^{-1/2}x_{11}^{1/2}} = \frac{x_{12}^{1/2}x_{12}^{1/2}}{x_{11}^{1/2}x_{11}^{1/2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x_{12}p_2 = x_{11}p_1$$

$$x_{11} = \frac{x_{12}p_2}{p_1}$$

$$x_{12} = \frac{x_{11}p_1}{p_2}$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria, primero el gasto:

$$p_1x_{11} + p_2x_{12} = p_1\left(\frac{x_{12}p_2}{p_1}\right) + p_2x_{12} = 2p_2x_{12}$$

e igual a la *renta*:

$$\frac{2}{3}(p_1 \cdot 30 + p_2 \cdot 9 + 54)$$

por lo que:

$$2p_2x_{12} = 20p_1 + 6p_2 + 36$$

de donde:

$$x_{12} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_2}$$

que obviamente no es homogénea de grado cero (basta multiplicar todos los precios por una constante, y la demanda sí se altera).

Para el segundo bien y todavía el primer agente:

$$2p_1x_{11} = 20p_1 + 6p_2 + 36$$

$$x_{11} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_1}$$

Nótese que –lógicamente– son análogas a las típicas funciones de demanda Cobb-Douglas, que dependen de los precios (p_1 y p_2, respectivamente), y de la *renta* ($20p_1 + 6p_2 + 36$).

Obtengamos ahora los de excesos de demanda y la restricción presupuestaria:

$$z_{11} = x_{11} - \bar{x}_{11} = \frac{20p_1}{2p_1} + \frac{6p_2}{2p_1} + \frac{36}{2p_1} - 30 = -20 + \frac{3p_2}{p_1} + \frac{18}{p_1}$$

$$z_{12} = x_{12} - \bar{x}_{12} = \frac{20p_1}{2p_2} + \frac{6p_2}{2p_2} + \frac{36}{2p_2} - 9 = \frac{10p_1}{p_2} - 6 + \frac{18}{p_2}$$

$$z_{13} = x_{13} - \bar{x}_{13} = \frac{1}{3}(30p_1 + 9p_2 + 54) - 54 = 10p_1 + 3p_2 - 36$$

$$p_1\left(-20 + 3\frac{p_2}{p_1} + \frac{18}{p_1}\right) + p_2\left(10\frac{p_1}{p_2} + \frac{18}{p_2} - 6\right) + 10p_1 + 3p_2 - 36 =$$
$$= -20p_1 + 3p_2 + 18 + 10p_1 + 18 - 6p_2 + 10p_1 + 3p_2 - 36$$

que obviamente se anulan entre sí, lo que implica el cumplimiento de la restricción presupuestaria.

Para el segundo consumidor, formando la función auxiliar de Lagrange y por analogía con el primero:

$$u(2) = x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2} - \lambda[(p_1x_{21} + p_2x_{22} - \frac{2}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24]$$

$$x_{21} = \frac{p_2}{p_1}x_{22}$$

$$x_{22} = \frac{p_1}{p_2}x_{21}$$

Siendo su restricción presupuestaria:

$$\frac{2}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24) = p_1\frac{p_2}{p_1}x_{22} + p_2x_{22} = 2p_2x_{22}$$

De donde:

$$x_{21} = \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_1}$$

$$x_{22} = \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_2}$$

$$x_{23} = \frac{1}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24)$$

Sus excesos de demanda son:

$$z_{21} = x_{21} - \bar{x}_{21} = 6 + 4\frac{p_2}{p_1} + \frac{8}{p_1} - 18$$

$$z_{22} = x_{22} - \bar{x}_{22} = 6\frac{p_1}{p_2} + 4 + \frac{8}{p_2} - 12$$

$$z_{23} = \frac{1}{3}(p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 12 + 24) - 24 = 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

$$p_1\left(6 + 4\frac{p_2}{p_1} + \frac{8}{p_1} - 18\right) + p_2\left(6\frac{p_1}{p_2} + 4 + \frac{8}{p_2} - 12\right) + 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

$$6p_1 + 4p_2 + 8 - 18p_1 + 6p_1 + 4p_2 + 8 - 12p_2 + 6p_1 + 4p_2 - 16 = 0$$

Que también se anula. El equilibrio de mercado implica la igualdad de las ofertas y demandas globales. La demanda global del bien 1 es:

$$x_{11} + x_{21} = \frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_1} + \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_1}$$

y las ofertas globales 30 + 18 = 48. Operando:

$$32p_1 + 14p_2 + 52 = 96p_1$$

Y las del bien 2 respectivamente:

$$\frac{20p_1 + 6p_2 + 36}{2p_2} + \frac{12p_1 + 8p_2 + 16}{2p_2} = \frac{32p_1 + 14p_2 + 52}{2p_2} = 21$$

$$x_{12} + x_{22} = 21$$

Es decir:

$$32p_1 + 52 = 28p_2$$

Ecuación que, junto con la del primer bien, permite obtener los dos precios (dos ecuaciones con dos incógnitas).

Frontera de utilidad

EJERCICIO 9.7.

Si una economía en intercambio puro viene caracterizada por las siguientes funciones de utilidad, $u(j) = 100x_{j1}^{0,7}x_{j2}^{0,3}$, $j = 1,2$, y unas dotaciones para cada agente de $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 20$. Obtener las asignaciones Pareto óptimas si las hay y establecer la frontera de utilidad.

Planteando el problema de óptimo ya conocido por la teoría:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u(1) = 100x_{11}^{0,7}x_{12}^{0,3} \\ \text{s.a.} \quad & \bar{u}(2) = 100x_{21}^{0,7}x_{22}^{0,3} \end{aligned}$$

y dado que se cumple que:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$
$$x_{12} + x_{22} = 20$$

entonces, el lagrangeano adopta la forma:

$$S = 100x_{11}^{0,7}x_{22}^{0,3} + \lambda[100x_{21}^{0,7}x_{22}^{0,3} - \bar{u}(2)] + \beta[20 - x_{11} - x_{21}] + \mu[20 - x_{12} - x_{22}]$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial S}{\partial x_{11}} = 100(0,7)x_{11}^{-0,3}x_{12}^{0,3} - \beta = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{12}} = 100(0,3)x_{12}^{-0,7}x_{11}^{0,7} - \mu = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{21}} = 100(0,7)x_{21}^{-0,3}x_{22}^{0,3} - \beta = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{22}} = 100(0,3)x_{22}^{-0,7}x_{21}^{0,7} - \mu = 0$$

Dividiendo la primera por la segunda y la tercera por la cuarta:

$$\frac{100(0,7)x_{11}^{-0,3}x_{12}^{0,3}}{100(0,3)x_{12}^{-0,7}x_{11}^{0,7}} = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{100(0,7)x_{21}^{-0,3}x_{22}^{0,3}}{100(0,3)x_{22}^{0,7}x_{21}^{0,3}} = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

$$x_{12} = \bar{x}_1 - x_{22} = 20 - x_{22}$$

$$x_{11} = \bar{x}_1 - x_{21} = 20 - x_{21}$$

obtenemos:

$$\frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{20 - x_{22}}{20 - x_{21}}$$

$$20x_{21} - x_{22}x_{21} = x_{22} \cdot 20 - x_{21}x_{22}$$

$$x_{21} = x_{22}$$

Sustituyendo en $u(2)$:

$$\bar{u}(2) = x_{21}^{0,7}x_{22}^{0,3} = x_{22}^{0,7}x_{22}^{0,3} = x_{22} = x_{21}$$

y en la restricción de recursos:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{11} + \bar{u}(2) = 20$$

$$x_{11} = 20 - \bar{u}(2)$$

Sustituyendo en $u(1)$:

$$u(1) = [20 - \bar{u}(2)]^{0,7}[20 - \bar{u}(2)]^{0,3} = 20 - \bar{u}(2)$$

$$u_1 = f(u_2) \qquad \text{en el intervalo } [0, 20]$$

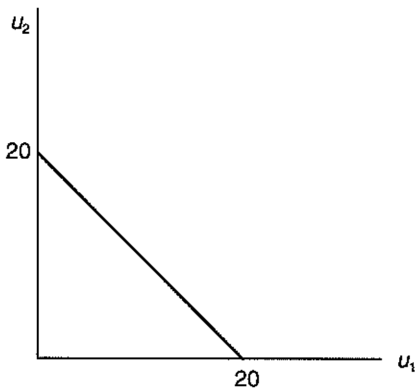

Figura 9.2

que es la frontera de posibilidades de utilidad o frontera de utilidad, que no es otra cosa que la frontera superior del conjunto de valores de índices de utilidad posibles y factibles. Debe notarse que: 1) es decreciente: 2) no existe una única asignación factible eficiente sino infinitas.

Curva de transformación

EJERCICIO 9.8.

Suponga una economía con dos funciones de producción como, $x_1 = 10L_1 + 3$, $x_2 = 20L_2 + 5$, cuya dotación de trabajo es $L = 60$. Obtenga la curva de trasformación.

Despejando en las funciones de producción:

$$L_1 = \frac{x_1 - 3}{10} \qquad L_2 = \frac{x_2 - 5}{20}$$

como debe cumplirse que:

$$L = L_1 + L_2 = 60 = \frac{x_1 - 3}{10} + \frac{x_2 - 5}{20}$$

de donde se obtiene:

$$x_1 = \frac{23}{2} - \frac{1}{2}x_2$$

que obviamente es una línea recta, lo que indica que la curva de transformación o frontera de posibilidades de producción, presenta un *trade-off* o grado de sustitución constante entre los dos bienes; de hecho la relación es 1/2, como señala la relación marginal de transformación técnica:

$$RMT_1^2 = -\frac{dx_2}{dx_1} = -2$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = 0$$

El signo menos señala el decrecimiento de la relación, derivado de la fijeza en la cantidad total del factor.

Si, por otro lado:

$$L_1 = L = 60 \qquad L_2 = 0$$

$$L_2 = L = 60 \qquad L_1 = 0$$

entonces:

$$\text{Para } L_2 = 0;\ x_1 = 10 \cdot 60 + 3 = 603$$

$$\text{Para } L_1 = 0;\ x_2 = 20 \cdot 60 + 5 = 1.205$$

luego es una línea recta con estos dos puntos como extremos.

EJERCICIO 9.9.

Para una economía cuyas funciones de producción son $x_1 = \sqrt{L_1}$, $x_2 = L_2$, si $L = 100$, hallar la curva de trasformación.

Despejando en las funciones de producción:

$$L_1 = x_1^2$$

y sustituyendo en la *ecuación de balance de la producción*:

$$L_1 + L_2 = L = 100 = x_1^2 + x_2$$

permite obtener:

$$x_2 = 100 - x_1^2$$

si:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 100$$

$$x_2 = 0 \qquad x_1 = 10$$

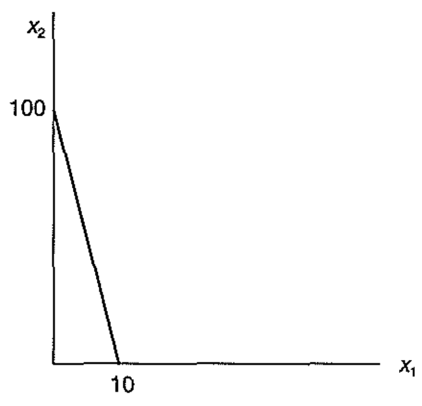

Figura 9.3

es decir una línea recta decreciente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2x_1 < 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -2$$

EJERCICIO 9.10.

Discuta la veracidad de la siguiente proposición: «La relación marginal de transformación es igual al cociente de los costes marginales de los dos outputs».

Los costes totales respectivos a largo plazo son:

$$CT(1) = rK_1 + wL_1$$

$$CT(2) = rK_2 + wL_2$$

por lo que los marginales son:

$$dCT(1) = rdK_1 + wdL_1$$

$$dCT(2) = rdK_2 + wdL_2$$

Dividiendo una por otra:

$$\frac{dCT(1)}{dCT(2)} = \frac{rdK_1 + wdL_1}{rdK_2 + wdL_2}$$

Pero, como dadas las dotaciones de factores se debe cumplir:

$$K = K_1 + K_2 \qquad L = L_1 + L_2$$

entonces:

$$dK = 0 = dK_1 + dK_2 \qquad dK_1 = -dK_2$$

$$dL = 0 = dL_1 + dL_2 \qquad dL_1 = -dL_2$$

y sustituyendo:

$$\frac{dCT(1)}{dCT(2)} = \frac{rdK_2 + wdL_2}{rdK_2 + wdL_2} = -1$$

La relación marginal de transformación es:

$$RMT_2^1 = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

Pero, por definición, los costes marginales son:

$$Cm(1) = \frac{dCT(1)}{dx_1} \qquad Cm(2) = \frac{dCT(2)}{dx_2}$$

por lo que, estableciendo el ratio del primero respecto al segundo:

$$\frac{Cm(1)}{Cm(2)} = \frac{dCT(1)}{dCT(2)} \frac{dx_2}{dx_1} = RMT_1^2$$

pero como el segundo término del segundo miembro hemos apreciado es igual a -1, y el segundo del segundo es la relación marginal de transformación, se cumple la proposición discutida.

Debe apreciarse que, dado que la relación marginal es también igual al cociente invertido de los precios de los productos, se cumple la igualdad de dichos precios y de los costes marginales respectivos a largo plazo –todos los factores variables–. En equilibrio general competitivo se obtiene en el punto en el que la relación marginal de transformación es igual al cociente de los precios de los outputs.

Condiciones de equilibrio y Ley de Walras

EJERCICIO 9.11.

Establezca matemáticamente las condiciones de equilibrio general competitivo, en el caso de un modelo de intercambio puro con dos bienes y dos agentes.

El equilibrio viene determinado por un vector de precios $(p_1^e\, p_2^e)$, tal que se igualen las ofertas a las demandas (e denota equilibrio). Es decir, que hagan cumplir las ecuaciones:

$$x_1 = x_{11}(p_1^e p_2^e) + x_{21}(p_1^e p_2^e) = \bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} = \bar{x}_1$$
$$x_2 = x_{12}(p_1^e p_2^e) + x_{22}(p_1^e p_2^e) = \bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} = \bar{x}_2$$

el primer subíndice indica agentes y el segundo bienes, sin pérdida de generalidad. Igualando de la oferta y la demanda, o lo que es lo mismo haciendo:

$$[x_{11}(p) - \bar{x}_{11}] + [x_{21}(p) - \bar{x}_{21}] = 0$$
$$[x_{12}(p) - \bar{x}_{12}] + [x_{22}(p) - \bar{x}_{22}] = 0$$

la suma de las demandas netas de cada agente, para cada bien, deben sumar 0. Las funciones de exceso de demanda son (p es el vector de precios de dos componentes p_1 y p_2) de los dos agentes para el primer bien:

$$z_{11}(p) = x_{11}(p) - \bar{x}_{11}$$
$$z_{21}(p) = x_{21}(p) - \bar{x}_{21}$$

Y sumando para los dos agentes y para los dos bienes:

$$z_1(p) = z_{11} + z_{21}$$
$$z_2(p) = z_{12} + z_{22}$$

Por lo que el equilibrio, implica, para el primer bien (mercado):

$$z_1(p^e) = 0$$

Y análogamente para el dos:

$$z_2(p^e) = 0$$

Equilibrio que queda garantizado, al menos, si las ecuaciones son lineales.

EJERCICIO 9.12.

Establezca la Ley de Walras para una economía de intercambio puro de dos bienes dos agentes.

La ley de Walras puede expresarse como:

$$p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0$$

es decir, la suma de los valores de los excesos de demanda es igual a cero. Sumando las restricciones presupuestarias de los dos agentes, primero para el uno, se obtiene:

$$p_1 x_{11}(p) + p_2 x_{12}(p) = p_1 \bar{x}_{11} + p_2 \bar{x}_{12}$$
$$p_1[x_{11}(p) - \bar{x}_{11}] + p_2[x_{12}(p) - \bar{x}_{12}] = 0$$

por lo que:

$$p_1 z_{11} + p_2 z_{12} = 0$$

valor del exceso de demanda del agente 1. Y análogamente para el dos:

$$p_1 z_{21} + p_2 z_{22} = 0$$

Como el valor de la demanda neta de cada uno de los dos agentes es cero, la suma de los dos tiene que sumar 0:

$$p_1(z_{11} + z_{21}) + p_2(z_{12} + z_{22})$$
$$p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0$$

Si z_1 es cero, es decir, el exceso de demanda es cero, es lo mismo que decir que se iguala la oferta y la demanda. Pero si:

$$p_1 z_1 = 0$$

ello implica que:

$$p_2 z_2 = 0$$

y como $p_2 > 0$ entonces tiene que ser cero z_2.

Todo ello se puede generalizar fácilmente para 3 o n bienes (mercados). Si $n - 1$ mercados están en equilibrio el n tiene que estarlo también. Nótese que se da para todos los precios, porque los agentes deben cumplir (ajustarse), a su restricción presupuestaria exactamente, es decir, no existe posibilidad de ahorro o atesoramiento.

EJERCICIO 9.13.

Comente la siguiente proposición: «Si la curva de transformación es convexa, ello implica que la economía presenta rendimientos crecientes a escala». ¿Verdadero o falso y por qué?

La convexidad de la curva de transformación no debe confundirse con los rendimientos a escala. Por ejemplo, la curva de transformación puede ser convexa, es decir, ser una línea recta, si *todas* las funciones de producción de la economía tienen las mismas *intensidades* de factores, es decir, las mismas relaciones capital/trabajo. Pero si la economía presenta rendimientos constantes a escala, lo único que indica es que en cada una de las funciones de producción, la duplicación, triplicación, etc., de las cantidades utilizadas de factores, implicará la duplicación, triplicación, etc, de las cantidades obtenidas de output. Pero ello no implica nada respecto a la convexidad. De hecho, si difieren las proporciones entre los factores, la relación marginal de transformación técnica entre los outputs (*RMT*) será cóncava, incluso si los rendimientos a escala son constantes.

EJERCICIO 9.14.

Comente la siguiente afirmación: «La igualdad de las relaciones marginales de sustitución en el consumo y transformación en la producción, ambas para bienes, no garantiza que sea adecuada la asignación en todos los sentidos». ¿Verdadero o falso y por qué?

Debe entenderse lo que significa la igualdad de las relaciones marginales de transformación técnica entre outputs (RMT_1^2) en la producción, y la relación marginal de sustitución de los bienes en el consumo (RMS_1^2). Aunque las empresas –dos o más–, produzcan diferentes bienes y diferentes cantidades, la condición necesaria y suficiente para el óptimo de Pareto es que la relación marginal de sustitución entre los inputs sea la misma. Si son iguales las de transformación y sustitución, además de ser producidos los dos bienes eficientemente, esas son las cantidades deseadas por los consumidores. Pero si no son iguales, ocurrirá por ejemplo, que se produce eficientemente, es decir, sobre la curva de posibilidades de producción, conocida también como curva de transformación, por más que esa combinación no sea la adecuada desde el punto de vista de los consumidores.

Estabilidad del equilibrio

EJERCICIO 9.15.

Analice la estabilidad de dos mercados de una economía y su estabilidad conjunta, suponiendo que se conocen los excesos de demanda de dos de sus tres mercados y que el tercero estará en equilibrio: $z_1 = 5p_1 - 6p_2$ y $z_2 = 8p_1 + 4p_2$.

Las condiciones teóricas de estabilidad implican $\dfrac{dz_1}{dp_1} < 0$, $\dfrac{dz_2}{dp_2} < 0$ sujetas en este caso a: $dz_1 = 5dp_1 - 6dp_2$, $dz_2 = 8dp_1 + 4dp_2$. Sin más que aplicarlas:

a) En el primer mercado si $dp_2 = 0$, entonces $\dfrac{dz_1}{dp_1} = 5 > 0$, que implica que no es estable. En el segundo mercado: si $dp_1 = 0$, $\dfrac{dz_2}{dp_2} = 4 > 0$, que tampoco es estable.

Pero si $dp_1 = 0$, ello implica que $dz_1 = 0$, y en consecuencia: $0 = 5dp_1 - 6dp_2$, de donde: $\left(\dfrac{dp_1}{dp_2}\right) = \dfrac{6}{5}$.

b) Volviendo al segundo mercado (el 2): $dz_2 = 8dp_1 + 4dp_2$, que en este caso es:

$$\frac{dz_2}{dp_2} = 8\frac{dp_1}{dp_2} + 4 = \left(8\,\frac{6}{5} + 4\right) > 0$$

luego el mercado 2 no es estable, y –obviamente– tampoco lo es la economía en su conjunto.

Bibliografía

Ahijado, M. (1994): *Microeconomía*. CERA.

Ahijado, M.; Ferrer, J. M.; Grau, P.; Fernández Cornejo, J. A., y Barrio, D. (1997): *Introducción a la Microeconomía para Administración y Dirección de empresas. Ejercicios y cuestiones de test*. CERA.

Ahijado, M.; Grau, P.; Barrio, D., y Osuna, R. (1999): *Principios de Microeconomía para Administración y Dirección de Empresas. Ejercicios y cuestiones de test*. CERA.

Birchenhall, Ch., y Grout, P. (1984): *Mathematics for Modern Economics*. Phillip Allan.

Bressler, B. (1975): *A unified introduction to mathematical economics*. Harper Row.

Chapasur, P., y Milleron, J. C. (1970): *Exercises de Microeconomie*. Dunod.

Chiang (1974): *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. McGraw Hill. Existe traducción castellana en McGraw Hill.

Diéguez, H., y Porto, A. (1971): *Problemas de Microeconomía*. Amorrortu.

Gravelle, H., y Rees, R. (1981): *Microeconomics*. Longman.

Henderson, M., y Quandt, R. E. (1962): *Microeconomic theory*. McGraw Hill.

Koutsoyannis, A. (1979): *Modern Microeconomics*, 2.ª ed. Macmillan.

Meza, D., y Osborne, M. (1980): *Problems in price theory*. Phillip Allan.

Quirk, P. (1976): *Intermediate Microeconomics*. SRA.

Thomas, R. (1987): *Applied Demand Analysis*. Longman.

Varian, H. (1990): *Intermediate Microeconomics. A modern Approach*. Norton, 2.ª ed. Existe edición castellana.

Winch, D. (1984): *Microeconomics. Problems and solutions*. Oxford University Press.